

---

# Methode zur Beschreibung von Piezo-Inkjetsystemen mit der Netzwerktheorie

am Beispiel eines Labordruckers

---

Vom Fachbereich Maschinenbau an der Technischen Universität Darmstadt  
zur Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs genehmigte

## Dissertation

eingereicht von

**Larisa Salun, M.Sc.**

Michajlowka, Kasachstan

Berichtserstatter: Prof. Dr.-Ing. Edgar Dörsam

Mitberichtserstatter: Prof. Dr.-Ing. habil. Roland Werthschützky  
Prof. Dr. rer. nat. Reinhard Baumann

Tag der Einreichung: 10.12.2012

Tag der mündlichen Prüfung: 6.02.2013

Darmstadt, 2013

D 17



---

## Danksagung

Diese Arbeit ist das Ergebnis meiner Tätigkeit am Institut für Druckmaschinen und Druckverfahren an der Technischen Universität Darmstadt. Die Inhalte der Arbeit resultieren aus dem LOEWE-Projekt AdRIA – Adaptronik - Research, Innovation, Application, das im Zeitraum von 2008 bis 2012 von mir bearbeitet wurde.

Mein herzlicher Dank gilt meinem Betreuer Prof. Dr.-Ing. Edgar Dörsam für das entgegengebrachte Vertrauen und die Betreuung meiner Arbeit. Auch für zielführende Diskussionen und hilfreiche Hinweise möchte ich mich an dieser Stelle bedanken. Diese haben sehr zum Gelingen meiner Arbeit beigetragen. Prof. Dr.-Ing. habil. Roland Werthschützky und Prof. Dr. rer. nat. Reinhard Baumann danke ich für die Übernahme des Koreferats.

Auch bei meinen Kollegen möchte ich mich für die tatkräftige Unterstützung und das aufmerksame Zuhören besonders in kritischen Phasen ganz herzlich bedanken. Die fruchtbaren Diskussionen und die enge Zusammenarbeit haben diese Arbeit erst richtig ermöglicht. Ich danke auch meinen Zimmerkollegen, Stefan und Sascha, die am meisten unter meinen Selbstgesprächen gelitten haben und mir viel Geduld entgegengebracht haben. Vielen Dank.

Für den großen Beitrag zu meiner experimentellen Arbeit möchte ich mich ganz besonders bei Dr.-Ing. Jann Neumann bedanken. Sicherlich wäre meine Arbeit ohne diese Unterstützung nicht so überzeugend geworden. Auch meinen Kollegen aus dem Institut für Strömungslehre und Aerodynamik, insbesondere Walter Schäfer und Ilja Buchmüller möchte ich meinen besonderen Dank für die tatkräftige Hilfe bei meinen optischen Messungen aussprechen. Meiner Kollegin aus dem Institut für Elektro-Mechanische Konstruktion, Dr.-Ing. Jacqueline Rausch, gilt mein besonderer Dank für konstruktive Diskussionen und vor allem für ihre Hilfe bei der Themafindung.

Zu guter Letzt möchte ich mich bei meiner Familie und meinen Freunden bedanken, die immer unsichtbar hinter mir standen und mir Kraft gegeben haben. Insbesondere meiner lieben Schwester danke ich für die sorgfältige und wohl aufwendigste erste Korrektur meiner Arbeit.

---



---

## Kurzfassung

Das Ziel dieser Arbeit ist, die im Bereich der Mechatronik und Mikrosystemtechnik bekannte Netzwerktheorie auf Piezo-Inkjetsysteme zu übertragen, um eine Modellabbildung zu erhalten. Diese soll das dynamische Verhalten fluidabhängig wiedergeben und den Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsparametern in Piezo-Inkjetsystemen beschreiben. Weiterhin soll ein Labordrucker im Modell abgebildet werden, um die Übertragbarkeit der Netzwerktheorie auf Piezo-Inkjetsysteme zu validieren.

Um dieses Ziel zu erreichen, wird eine Modellabbildung der wesentlichen physikalischen Elemente der Piezo-Inkjetsysteme in der Netzwerktheorie vorgestellt, die Eigenschaften der physikalischen Elemente von Piezo-Inkjetsystemen mit Modellparametern verbindet. Anschließend wird ein Modell des Labordruckers erstellt. Um Modellparameter für den Labordrucker festzulegen, werden die Geometrie und die Eigenschaften der wesentlichen physikalischen Elemente des Labordruckers bestimmt. Unter anderem wird der Einfluss der geometrischen und physikalischen Eigenschaften auf die errechneten Modellparameter und das dynamische Verhalten analysiert.

Das Modell des Labordruckers wird anschließend durch optische und elektrische Messungen validiert. Optische Messungen dienen dabei der Bestimmung der Stabilität der Tropfenbildung im Labordrucker, um die herstellungstechnischen Abweichungen in den Experimenten zu bestimmen. Abschließend werden elektrische Messungen vorgenommen und das dynamische Verhalten des Labordruckers bestimmt. Die gemessene Übertragungsfunktion liefert einen direkten Vergleich mit der modellierten Übertragungsfunktion, so dass eine Validierung des Modells vorgenommen werden kann.

Die Ergebnisse der Validierung belegen, dass die Netzwerktheorie mit einer guten Übereinstimmung auf den Labordrucker übertragen werden kann und durch das Modell sowohl das dynamische Verhalten als auch der Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsparametern fluidabhängig wiedergegeben werden.

---



---

## Abstract

The aim of this work is to transfer the network theory to piezo inkjet systems in order to provide a model of those. The theory is well-known in the field of mechatronics and microsystems technology and describes the transfer behaviour of piezo inkjet systems in dependence with the filled fluid. Furthermore, the relationship between input and output parameters in piezo inkjet systems can be described.

To validate the applicability of the network theory on piezo inkjet systems, a lab printer is modelled. For this purpose, the physical elements of the lab printer are modelled and the model parameters are combined with the physical properties and geometry of these physical elements. To specify the model parameters of the lab printer, the geometry and the properties of the physical elements are determined in an experiment. After this, a model of the lab printer is implemented. Furthermore, the influence of the geometry and physical properties of the physical element on the model parameters and the transmission behaviour of the lab printer are analysed.

Optical and electrical measurements are performed to validate the model of the lab printer. Optical measurements represent the stability of the drop formation in the lab printer and determine the deviations in the experiments due to the lab printer manufacturing deviations. The electrical measurements determine the transmission behaviour of the lab printer. The measured transfer function provides a direct comparison with the modelled transfer function and the model of the lab printer can be validated.

The comparison of the modelled and measured transmission function verifies that the network theory can be applied to the lab printer and consequently to other piezo inkjet systems. Moreover, the transmission behaviour of piezo inkjet systems can be described in dependence with the filled fluid as well as the relationship between input and output parameters can be determined.

---





---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2. Ausgangssituation und Ziel</b>	<b>3</b>
2.1. Inkjetsysteme . . . . .	3
2.2. Inkjetsysteme auf Basis der Piezotechnologie . . . . .	6
2.3. Beschreibung des Labordruckers . . . . .	8
2.4. Problemstellung und Herausforderung . . . . .	9
2.5. Stand der Forschung . . . . .	10
2.5.1. Experimentelle Studien und Simulationen . . . . .	10
2.5.2. Modelle und Theorien . . . . .	14
2.5.3. Netzwerktheorie . . . . .	15
2.6. Zielsetzung und Aufbau der Arbeit . . . . .	15
<b>3. Grundlagen der Netzwerktheorie</b>	<b>17</b>
3.1. Allgemeine Struktur der Netzwerktheorie . . . . .	17
3.2. Annahmen . . . . .	18
3.3. Signalbeschreibung . . . . .	20
3.4. Abstraktes lineares Netzwerk . . . . .	21
3.5. Isomorphie zwischen Netzwerken . . . . .	23
3.6. Schlußfolgerungen . . . . .	25
<b>4. Modellierung mit konzentrierten Parametern</b>	<b>27</b>
4.1. Physikalische Elemente der Piezo-Inkjetsysteme . . . . .	27
4.2. Elektrische Teilstruktur . . . . .	29
4.3. Elektro-mechanische Kopplungsstruktur . . . . .	30
4.4. Mechanische Teilstruktur . . . . .	34
4.5. Mechanisch-akustische Kopplungsstruktur . . . . .	35
4.6. Akustische Teilstruktur . . . . .	39
4.6.1. Kanalartige Fluidkanäle . . . . .	40
4.6.2. Volumenartige Fluidkanäle . . . . .	43
4.6.3. Transformatorische Verknüpfung der Netzwerke . . . . .	44
4.6.4. Kanalartige Trichter . . . . .	45
4.7. Gesamte physikalische Struktur . . . . .	50
4.7.1. Gyratorische Transformation der Netzwerke . . . . .	52
4.7.2. Transformatorische Transformation der Netzwerke . . . . .	53
4.8. Schlußfolgerungen . . . . .	54

---

<b>5. Modellierung mit verteilten Parametern</b>	<b>55</b>
5.1. Abstrakter Wellenleiter . . . . .	55
5.1.1. Eindimensionaler Wellenleiter . . . . .	55
5.1.2. Eindimensionaler Wellenleiter mit variablem Querschnitt . . . . .	62
5.2. Abstraktes Kopplungselement als Wellenleiter . . . . .	63
5.3. Übertragung auf reale physikalische Elemente . . . . .	66
5.3.1. Mechanische Teilstruktur . . . . .	66
5.3.2. Akustische Teilstruktur . . . . .	67
5.3.3. Mechanisch-akustische Kopplungsstruktur . . . . .	69
5.3.4. Elektro-mechanische Kopplungsstruktur . . . . .	70
5.4. Schlußfolgerungen . . . . .	72
<b>6. Modellierung des Labordruckers</b>	<b>73</b>
6.1. Geometrie des Düsenkanals . . . . .	73
6.2. Modellbildung . . . . .	75
6.2.1. Annahmen . . . . .	76
6.2.2. Elektro-mechanische Kopplungsstruktur . . . . .	77
6.2.3. Mechanisch-akustische Kopplungsstruktur . . . . .	79
6.2.4. Akustische Teilstruktur: Fluidkanäle . . . . .	80
6.2.5. Akustische Teilstruktur: Transformatoren . . . . .	83
6.2.6. Akustische Teilstruktur: Trichter . . . . .	84
6.3. Gesamtmodell des Düsenkanals . . . . .	86
6.4. Schlußfolgerungen . . . . .	90
<b>7. Charakterisierung des Modells</b>	<b>93</b>
7.1. Dynamisches Verhalten . . . . .	93
7.1.1. Übertragungsfunktion . . . . .	93
7.1.2. Stabilitätsverhalten . . . . .	94
7.1.3. Übertragungsverhalten . . . . .	95
7.2. Bauelementabhängiges dynamisches Verhalten . . . . .	96
7.2.1. Bauelement $L_G^E$ . . . . .	97
7.2.2. Bauelement $R_G^E$ . . . . .	98
7.2.3. Bauelement $C_{K7}^E$ . . . . .	99
7.2.4. Bauelement $C_{K2}^E$ . . . . .	99
7.2.5. Eigenschaften des Piezoelementes . . . . .	100
7.2.6. Weitere Parameter . . . . .	101
7.3. Schlußfolgerungen . . . . .	101
<b>8. Experimente und Validierung des Modells</b>	<b>103</b>
8.1. Optische Messungen . . . . .	103
8.1.1. Aufbau der Experimente . . . . .	103
8.1.2. Reproduzierbarkeit in einem Düsenkanal . . . . .	104
8.1.3. Reproduzierbarkeit in mehreren Düsenkanälen . . . . .	107
8.2. Zeitaufgelöste optische Messungen . . . . .	108
8.2.1. Vorüberlegungen zu den Messungen . . . . .	108
8.2.2. Aufbau mit konstanter Lichtquelle . . . . .	109
8.2.3. Aufbau mit synchronisierter Lichtquelle . . . . .	111

---

---

8.2.4. Aufbau mit externer Pulsquelle . . . . .	112
8.2.5. Aufbau mit Laserquelle . . . . .	113
8.3. Elektrische Messungen . . . . .	114
8.3.1. Experimenteller Aufbau . . . . .	114
8.3.2. Elektrische Messungen am Düsenkanal . . . . .	115
8.4. Validierung des Modells . . . . .	117
8.4.1. Vergleich von Modell und Experiment . . . . .	117
8.4.2. Modelloptimierung . . . . .	118
8.5. Diskussion der Ergebnisse . . . . .	120
<b>9. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>125</b>
<b>10. 9. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>127</b>
<b>11. Eigene Veröffentlichungen</b>	<b>139</b>
<b>A. Übertragungsfunktion in Polynomform</b>	<b>141</b>
A.1. Zählerpolynom . . . . .	141
A.2. Nennerpolynom . . . . .	142
<b>B. Auswertungsscripte</b>	<b>143</b>
B.1. Berechnung der Tropfenfläche . . . . .	143
B.2. Berechnung des Tropfenabstandes von der Düse . . . . .	145
B.3. Optimierung der Bauelemente . . . . .	147



---

## Symbolverzeichnis

$\alpha$	[-]	Abstraktes Bauelement
$\beta$	[-]	Abstraktes Bauelement
$\gamma$	[-]	Abstraktes Bauelement
$\epsilon^S$	[F/m]	Permittivität für S=0
$\epsilon_{ij}^S$	[F/m]	Permittivität für S=0 in Krafrichtung ij
$\epsilon_0$	[F/m]	Elektrische Feldkonstante
$\epsilon_r$	[-]	Dielektrizitätszahl
$\kappa$	[-]	Adiabatenexponent
$\underline{\lambda}$	[-]	Abstrakte Flusskoordinate
$\mu_0$	[H/m]	Magnetische Feldkonstante
$\mu_r$	[-]	Permeabilitätszahl
$\underline{\mu}$	[-]	Abstrakte Differenzkoordinate
$\eta$	[Pas]	Viskosität
$\sigma$	[N/m]	Oberflächenspannung
$\xi(t)$	[m]	Auslenkung
$\underline{\xi}(t)$	[m]	Komplexe Auslenkung
$\xi_0$	[m]	Gesamtauslenkung im Punkt 0
$\xi_{F_0}$	[m]	Kraftbedingte maximale Auslenkung im Punkt 0
$\xi_F$	[m]	Kraftbedingte ortsabhängige Auslenkung
$\xi_{p_0}$	[m]	Druckbedingte ortsabhängige Auslenkung im Punkt 0
$\xi_p$	[m]	Druckbedingte ortsabhängige Auslenkung
$\rho$	[ $\Omega\text{m}$ ]	Spezifischer Widerstand
$\rho_0$	[kg/m <sup>3</sup> ]	Dichte
$\phi$	[rad]	Phasenwinkel
$\theta$	[°]	Winkel
$\omega$	[1/s]	Kreisfrequenz
$\omega_0$	[1/s]	Resonanzfrequenz
$\omega_g$	[1/s]	Grenzfrequenz
$a_i$	[-]	Polynomkoeffizienten

---

$A$	$[m^2]$	Querschnittsfläche
$A^E$	$[m^2]$	Elektrisch wirksame Fläche
$A^M$	$[m^2]$	Mechanisch wirksame Fläche
$A_{ij}, A'_{ij}$	$[m^2]$	Querschnittsfläche auf ij-Achsenfläche
$\underline{a}_{ij}$	$[-]$	Kettenmatrixelemente
$b_i$	$[-]$	Polynomkoeffizienten
$B$	$[Ns/m^5]$	Proportionalitätskonstante
$c_{ij}^E$	$[Nm^2]$	Elastischer Koeffizient für $E=0$
$C^A$	$[m^5/N]$	Akustische Nachgiebigkeit
$C_k^A$	$[m^5/N]$	Akustische Nachgiebigkeit des Bauelementes k
$C^E$	$[C]$	Elektrische Kapazität
$C_n^E$	$[C]$	Elektrische Kapazität des Bauelementes n
$C^M$	$[kg]$	Masse im Modell
$C_k^M$	$[kg]$	Masse des Bauelementes k im Modell
$D$	$[Cm^2]$	Elastische Verschiebungsdichte
$e_{ij}$	$[N/V]$	Piezoelektrische Kraftkonstante
$E$	$[Nm^2]$	Elastizitätsmodul
$E$	$[V/m]$	Elektrische Feldstärke
$F(t)$	$[N]$	Kraft
$\underline{F}$	$[N]$	Komplexe Kraft
$\underline{F}_k$	$[N]$	Komplexe Kraft am Bauelement k
$h(t)$	$[V]$	Impulsantwort
$i$	$[-]$	Summationsindex
$i(t)$	$[A]$	Strom
$\underline{i}$	$[A]$	Komplexer Strom
$\underline{i}_k$	$[A]$	Komplexer Strom am Bauelement k
$\underline{i}_W$	$[A]$	Komplexer Wandlerstrom
$j$	$[-]$	Imaginäre Einheit
$k$	$[-]$	Anzahl infinitesimaler Elemente
$K$	$[Pa]$	Kompressibilitätsmodul
$l$	$[m]$	Länge
$l^E$	$[m]$	Elektrisch wirksame Länge
$l^M$	$[m]$	Mechanisch wirksame Länge
$l_i$	$[m]$	Segmentlänge
$l_j$	$[m]$	Länge in Richtung der Achse j

---

---

$L^A$	[kg/m <sup>4</sup> ]	Akustische Masse
$L_k^A$	[kg/m <sup>4</sup> ]	Akustische Masse des Bauelementes k
$L_{k,n}^A$	[kg/m <sup>4</sup> ]	Infinitesimale akustische Masse
$L^E$	[H]	Elektrische Induktivität
$L_k^E$	[H]	Elektrische Induktivität des Bauelementes k
$L^M$	[m/N]	Mechanische Nachgiebigkeit
$L_k^M$	[m/N]	Mechanische Nachgiebigkeit des Bauelementes k
$m$	[kg]	Physikalische Masse
$n$	[-]	Laufindex
$\underline{N}(j\omega)$	[-]	Nennerpolynom der Übertragungsfunktion
$p(t)$	[Pa]	Druck
$\underline{p}$	[Pa]	Komplexer Druck
$\underline{p}_k$	[Pa]	Komplexer Druck am Bauelement k
$\underline{p}_W$	[Pa]	Komplexer Wandlerdruck
$q(t)$	[m <sup>3</sup> /s]	Volumenfluss
$\underline{q}$	[m <sup>3</sup> /s]	Komplexer Volumenfluss
$\underline{q}_k$	[m <sup>3</sup> /s]	Komplexer Volumenfluss am Bauelement k
$\underline{q}_W$	[m <sup>3</sup> /s]	Komplexer Wandlervolumenfluss
$Q$	[C]	Ladung
$\underline{Q}$	[C]	Komplexe Ladung
$r$	[m]	Radius
$R^A$	[Ns/m <sup>5</sup> ]	Akustische Reibung
$R_k^A$	[Ns/m <sup>5</sup> ]	Akustische Reibung des Bauelementes k
$R_{k,n}^A$	[Ns/m <sup>5</sup> ]	Infinitesimale akustische Reibung
$R^E$	[Ω]	Elektrischer Widerstand
$R_k^E$	[Ω]	Elektrischer Widerstand des Bauelementes k
$R^M$	[m/sN]	Translatorische Admittanz
$R_k^M$	[m/sN]	Translatorische Admittanz des Bauelementes k
$s$	[1/s]	Komplexe Frequenz
$S(t)$	[m <sup>2</sup> ]	Dreidimensionale Oberfläche
$S$	[-]	Mechanische Dehnung
$\underline{S}$	[-]	Komplexe mechanische Dehnung
$\Delta t$	[s]	Zeitdifferenz
$t$	[s]	Zeit

---

---

$T$	[N/m <sup>2</sup> ]	Mechanische Spannung
$\underline{T}$	[N/m <sup>2</sup> ]	Komplexe mechanische Spannung
$\ddot{u}$	[-]	Übersetzungsverhältnis
$u(t)$	[V]	Elektrische Spannung
$u_S(t)$	[V]	Sprungantwort
$u_{S,0}(t)$	[V]	Referenzsprungantwort
$\underline{u}$	[V]	Komplexe elektrische Spannung
$\underline{u}_k$	[V]	Komplexe elektrische Spannung am Bauelement k
$\underline{u}_W$	[V]	Komplexe elektrische Wandler <span style="font-variant: small-caps;">spannung</span>
$v(t)$	[m/s]	Geschwindigkeit
$v_S$	[m/s]	Schallgeschwindigkeit
$\underline{v}$	[m/s]	Komplexe Geschwindigkeit
$\underline{v}_k$	[m/s]	Komplexe Geschwindigkeit am Bauelement k
$\underline{v}_W$	[m/s]	Komplexe Wandler <span style="font-variant: small-caps;">geschwindigkeit</span>
$\Delta V$	[m <sup>3</sup> ]	Volumendifferenz
$V(t)$	[m <sup>3</sup> ]	Volumen
$V_F$	[m <sup>3</sup> ]	Durch Kraft verdrängtes Volumen
$V_p$	[m <sup>3</sup> ]	Durch Druck verdrängtes Volumen
$x$	[m]	Bezugs <span style="font-variant: small-caps;">lage</span>
$X$	[-]	Transformatorische Wandler <span style="font-variant: small-caps;">konstante</span>
$\underline{X}$	[-]	Kettenmatrix eines Transformators
$Y$	[-]	Gyratorische Wandler <span style="font-variant: small-caps;">konstante</span>
$\underline{Y}$	[-]	Kettenmatrix eines Gy <span style="font-variant: small-caps;">rators</span>
$\underline{Z}$	[ $\Omega$ ]	Elektrische Impedanz
$\underline{Z}(j\omega)$	[-]	Zählerpolynom der Übertragungsfunktion



---

# 1. Einführung

Die Inkjetsysteme finden in den letzten Jahren einen vermehrten Einsatz im Bereich der Herstellung von klassischen Print-Medien sowie im Bereich des funktionalen Drucks. Die Untersuchungen auf diesem Gebiet werden vor allem durch steigende Anforderungen an die Inkjetsysteme motiviert.

Insbesondere im Bereich des funktionalen Drucks werden gute Druckauflösung, reproduzierbares Druckergebnis und hohe Druckgeschwindigkeit gefordert. Diese sind ohne die genaue Kenntnis des Verhaltens von Inkjetsystemen und des Zusammenhanges zwischen Eingangs- und Ausgangsparametern nicht zu erreichen. Eine Herausforderung stellt hier auch die Vielfalt der möglichen Ausführungen von Inkjetsystemen, die auf dem Markt sind, dar.

Diese Arbeit befasst sich speziell mit Inkjetsystemen auf Basis der Piezotechnologie, die in den letzten Jahren vermehrt zum Drucken funktionaler Schichten eingesetzt werden. Diese Technik ist in diesem Bereich insbesondere wegen der kontaktlosen Herstellung mehrschichtiger Funktionalitäten interessant. Die meisten Piezo-Inkjetsysteme für funktionales Drucken werden im Gegensatz zu Piezo-Inkjetsystemen für grafisches Drucken flexibel gestaltet, so dass der Einsatz mehrerer Fluide möglich ist. In diesem Fall ist die genaue Kenntnis des Piezo-Inkjetsystems besonders interessant, da die Einstellung des Systems auf ein neues Fluid sehr aufwendig und zeitintensiv sein kann.

Ziel dieser Arbeit ist, die im Bereich der Elektrotechnik und Mikrosystemtechnik bekannte Netzwerktheorie, die eine einheitliche Beschreibung des dynamischen Verhaltens im Modell erlaubt, auf Piezo-Inkjetsysteme zu übertragen. An einem Labordrucker soll die Übertragbarkeit der Netzwerktheorie auf Piezo-Inkjetsysteme validiert werden.

Die Modellabbildung einiger physikalischer Elemente der Piezo-Inkjetsysteme wird in dieser Arbeit aus bereits bekannten Beschreibungen in der Netzwerktheorie übernommen. Fehlende Modellabbildungen physikalischer Elemente, die speziell in Piezo-Inkjetsystemen vorkommen, werden hergeleitet. Anschließend wird ein Netzwerkmodell des Labordruckers erstellt und somit sein dynamisches Verhalten modelliert.

Das Modell des Labordruckers wird zur Bestimmung der Stabilität und Abhängigkeit

des dynamischen Verhaltens von Bauelementen im Modell untersucht. Hier kann der Einfluss der bei der Modellbildung getroffenen Annahmen und der Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsparametern untersucht werden.

Das Modell des Labordruckers wird anschließend in optischen und elektrischen Messungen validiert. In optischen Messungen wird die Reproduzierbarkeit und die Stabilität der Tropfenbildung des Labordruckers untersucht und die Systemgenauigkeit bestimmt. Die elektrischen Messungen werden zur Bestimmung des tatsächlichen dynamischen Verhaltens des Labordruckers eingesetzt. Die modellierte und die experimentell bestimmte Übertragungsfunktionen werden anschließend verglichen. Eine Anpassung der Bauelemente im Modell auf das experimentell bestimmte Verhalten dient der genauen Untersuchung der Unterschiede zwischen Modell und Realität.

---

## 2. Ausgangssituation und Ziel

In diesem Kapitel wird kurz in die Problematik der Inkjetsysteme eingeführt und der heutige Stand der Technik und der Forschung auf diesem Gebiet ausführlich beschrieben. Anschließend werden Motivation, Ziel und Aufbau der Arbeit vorgestellt.

### 2.1. Inkjetsysteme

Der Inkjetdruck ist eine NIP<sup>1</sup>-Technologie, bei der Tropfen im Pikoliter-Bereich zur Erstellung eines Bildes produziert werden und berührungslos auf dem Substrat landen [1][2]. Die ersten kontinuierlichen Inkjetsysteme kamen bereits 1951 auf den Markt [3], später wurden Inkjetsysteme auf Basis der DoD<sup>2</sup>-Technologie entwickelt [4][5].

Im Grunde werden bei den kontinuierlichen sowohl auch bei DoD-Inkjetsystemen kleine Tropfen zur Erzeugung eines Bildes produziert. Dazu wird in den  $\mu\text{m}$ -breiten mit Fluid gefüllten Fluidkanälen Überdruck erzeugt, der zur Tropfenbildung an der kleinen Düse des Inkjetsystems führt. Der Aufbau der Fluidkanäle sowie die Erzeugung des Überdrucks an der Düse unterscheiden sich je nach Inkjetsystem.

In kontinuierlichen Inkjetsystemen wird in den meisten Fällen durch Pumpen ein Fluidstrahl aus der Düse erzeugt, wie in der Abbildung 2.1 gezeigt ist. Der Fluidstrahl geht anschließend durch das Einschnüren in einen Strahl von kleinen Tropfen über. Durch ein Piezoelement wird eine Frequenz dem Fluidstrahl aufgeprägt, so dass das Einschnüren des Fluidstrahls kontrolliert abläuft. Die gebildeten Tropfen werden bildabhängig aufgeladen und anschließend sortiert [6][7]. Die ungeladenen Tropfen landen auf dem Substrat und erzeugen ein Bild und die geladenen Tropfen werden abgelenkt und landen wieder im Fluidbehälter [8][9]. Die Größe der Tropfen liegt bei solchen Systemen zwischen 40  $\mu\text{m}$  und 120  $\mu\text{m}$  und die Frequenzen können bis zu 80 kHz betragen [6]. Zur Versorgung solcher Systeme ist ein ununterbrochener Fluidfluss erforderlich und somit ein großer Fluidvorrat zur Bedienung des Inkjetsystems notwendig.

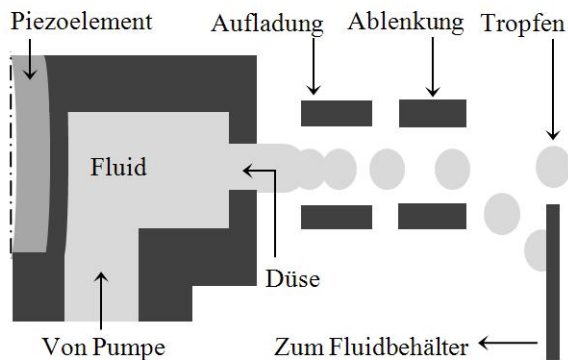
---

<sup>1</sup>Non-Impact-Printing

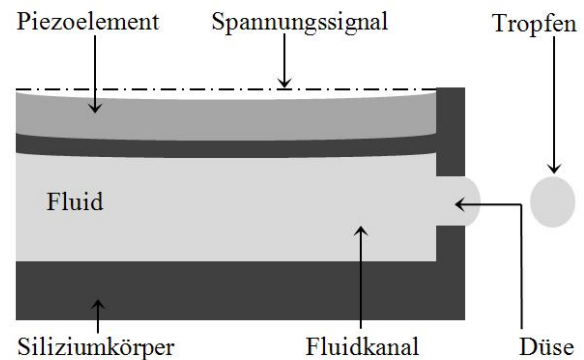
<sup>2</sup>Drop-on-Demand

Bei DoD-Inkjetsystemen werden im Gegensatz zu den kontinuierlichen Inkjetsystemen die Tropfen nur produziert, wenn diese für das Drucken notwendig sind [6][7][8]. Die zur Herstellung des Bildes und zur Bedienung des DoD-Inkjetsystems erforderliche Fluidmenge fällt somit wesentlich geringer aus. Der Überdruck in den Fluidkanälen kann in den DoD-Inkjetsystemen sowohl thermisch und durch Piezoelement als auch durch andere Verfahren erzeugt werden [6][10]. Überwiegend sind jedoch Piezo- und Thermo-Inkjetsysteme verbreitet [10].

Ein schematischer Aufbau eines DoD-Inkjetsystems auf Basis der Piezotechnologie ist in der Abbildung 2.2 gezeigt. Das Fluid kommt dabei durch die Kapillarkraft in die Fluidkanäle und wird anschließend durch die Düse rausgepresst und Tropfen im Pikoliter-Bereich werden produziert [6]. Die Größe der Fluidkanäle liegt in  $\mu\text{m}$ -Bereich, damit das Wiederfüllen der Fluidkanäle nach einer Tropfenproduktion durch Kapillarkraft schnell erfolgt. Die Verformung des Piezoelements mit anschließender Druckausbreitung zur Düse und Tropfenbildung werden durch Anlegen einer Spannung erreicht. Die Spannungssignale können dabei rechteckige, dreieckige oder auch komplexere Form haben [11]. Die Dauer der Spannungssignale unterscheidet sich je nach der Bauweise des Piezo-Inkjetsystems und liegt im Bereich  $3 \mu\text{s}$  bis  $50 \mu\text{s}$ . Die Höhe der angelegten Spannung kann auch verschieden sein und variiert im Bereich 20 V bis 150 V. Das Piezoelement wird üblicherweise mit einer Frequenz im Bereich 1-20 kHz betrieben, wobei die Frequenzen im Wesentlichen durch das Wiederbefüllen der Fluidkanäle begrenzt sind. Die Tropfengröße liegt hier zwischen  $10 \mu\text{m}$  und  $80 \mu\text{m}$  [11].



**Abbildung 2.1.:** Schematischer Aufbau eines Düsenkanals bei kontinuierlichem Inkjetsystem.



**Abbildung 2.2.:** Schematischer Aufbau eines Düsenkanals bei DoD-Piezo-Inkjetsystem.

Bei Thermo-Inkjetsystemen wird der Überdruck durch Erhitzen des Fluids und dem anschließenden Übergang flüssiger in gasförmige Phase [12] erreicht. Dabei wird durch kurze Spannungssignale ein kleines eingebautes Heizelement betrieben, das die Wärme an das Fluid abgibt. Die Frequenzen der Spannungssignale liegen hier im Bereich zwischen

1 kHz und 10 kHz und sind durch die zwischen den Spannungssignalen erforderliche Abkühlung des Heizelements begrenzt. Die Tropfengröße liegt hier zwischen 40  $\mu\text{m}$  und 120  $\mu\text{m}$  [6][12].

Die Düsenplatten sowohl bei Thermo- als auch bei Piezo-Inkjetsystemen werden durch Ätzverfahren in einem Silizium-Körper hergestellt. Die Düsenplatten können einzelne sowie mehrere Düsenkanäle mit Düse und dazugehörige Fluidkanäle beinhalten, die von einem gemeinsamen Fluidbehälter jeweils zu einer Düse führen. Die Düsenkanäle können aus einem Fluidkanal und der Düse sowie aus mehreren in ihrer Geometrie verschiedenen Fluidkanälen bestehen [11]. Die Düsenplatte wird mit anderen Bauteilen anschließend zu einem Druckkopf montiert. Jeder Düsenkanal kann dabei getrennt angesteuert werden. Abhängig von der Bauweise und von der Breite der Düsenkanäle liegt der Abstand zwischen einzelnen Düsen auf einer Düsenplatte bei etwa 250-500  $\mu\text{m}$  [11]. Die Anzahl von Düsenkanälen auf einer Düsenplatte und somit in einem Druckkopf beeinflusst die Druckgeschwindigkeit, sodass die Hersteller bestrebt sind, Druckköpfe mit möglichst großer Anzahl von Düsenkanälen zu produzieren. Je nach Hersteller kann die Anzahl der Düsenkanäle in einem Druckkopf im Bereich Hundert bis mehrere Tausend liegen [6].

Inkjetsysteme werden für verschiedene Zwecke eingesetzt. So werden zum Beispiel Thermo-Inkjetsysteme bevorzugt im SOHO<sup>3</sup>-Bereich [6][13] verwendet und die Piezo- sowie die kontinuierlichen Inkjetsysteme finden eine Anwendung im Bereich gedruckter Elektronik [14].

Hier werden bevorzugt Piezo-Inkjetsysteme eingesetzt [15][16], um einerseits die Fluidmenge zu reduzieren und andererseits die sensiblen funktionalen Fluide nicht thermisch zu beeinflussen. Die Piezo-Inkjetsysteme werden dabei zur Herstellung von einschichtigen Funktionalitäten wie zum Beispiel RFID-Antennen [17][18] und chemischen Gas-Sensoren [19][20] verwendet. Auch die drucktechnische Herstellung von solchen einschichtigen Funktionalitäten wie Dehnungsmessstreifen [21][22] und Leiterbahnen [23][24][25] ist bekannt. Bei den Funktionalitäten mit mehrschichtigem Aufbau wie OLEDs [26][27][28] und OFETs [29][30][31] werden Piezo-Inkjetsysteme auch wegen des kontaktlosen Druckprozesses und den erzielbaren dünnen Schichten bevorzugt. Auch andere Vorteile der Piezo-Inkjetsysteme werden in weiteren Anwendungen genutzt [32][33][34].

Auch Fluide, die bei Piezo-Inkjetsystemen verwendet werden, unterscheiden sich stark voneinander. So können zum Beispiel UV-, Hot-Melt-, lösungsmittel- und wasserbasierte Farben sowie Dispersionen verdruckt werden [6][35]. Für funktionales Drucken werden dabei sowohl lösungsmittel- und wasserbasierte Polymerlösungen [36][37] als auch Dispersionen kleiner Metall- und Polymerpartikel [24][38][39][40] eingesetzt.

---

<sup>3</sup>Small Office-Home Office

## 2.2. Inkjetsysteme auf Basis der Piezotechnologie

In dem Aufbau eines Düsenkanals mit dazugehörigen Fluidkanälen und der Düse in Piezo-Inkjetsystemen können die Bauweisen nach Ausführung des Piezoelements unterschieden werden. Die Piezoelemente können nach ihrer Geometrie in Scheibe und Lamelle [41][42][43][44] und nach dem Wirkungsprinzip in Dicken-, Längs-, Scher-, und Biegeschwinger [45] eingeteilt werden. Die Geometrie und das Wirkungsprinzip können auf beliebige Weise kombiniert werden, so dass eine Vielzahl an möglichen Ausführungen für Piezo-Inkjetsysteme existiert [10].

Mögliche Geometrien und Wirkungsprinzipien sind in der Tabelle 2.1 gezeigt. Die Verformung der aufgeführten Piezoelemente nach dem Anlegen einer Spannung ist mit gestrichelter Linie angedeutet. Das Wirkungsprinzip des Piezoröhrchens unterscheidet sich aufgrund der Kräftewirkung in mehrere Richtungen von den weiteren Ausführungen des Piezoelementes und stellt an dieser Stelle eine Ausnahme dar. Solche Systeme wurden in mehreren Arbeiten [46][47][48] ausführlich beschrieben, deshalb wird in dieser Arbeit auf eine Modellabbildung anderer Geometrien eingegangen.

Die Geometrie der Düsenkanäle sowie derer Ausführung unterscheidet sich stark je nach Druckkopf und hängt von der Ausführung des Piezoelementes, seiner Frequenz, den Fluideigenschaften, der gewünschten Tropfengröße und auch weiteren Parametern ab [1][10].

Die Ausführung der Fluidkanäle bei Auslegung des Piezoelementes als Scheibe oder als Lamelle ist üblicherweise rechteckig [49][50]. Diese Geometrie ist bei der Herstellung der Druckköpfe durch Ätzverfahren am einfachsten zu realisieren. Die Geometrie der Düse selbst kann jedoch variieren und zur besseren Tropfenbildung auch in Rohrform ausgeführt sein [41][51].

Dickenschwinger	Längsschwinger	Scherschwinger	Biegeschwinger	Röhrchen

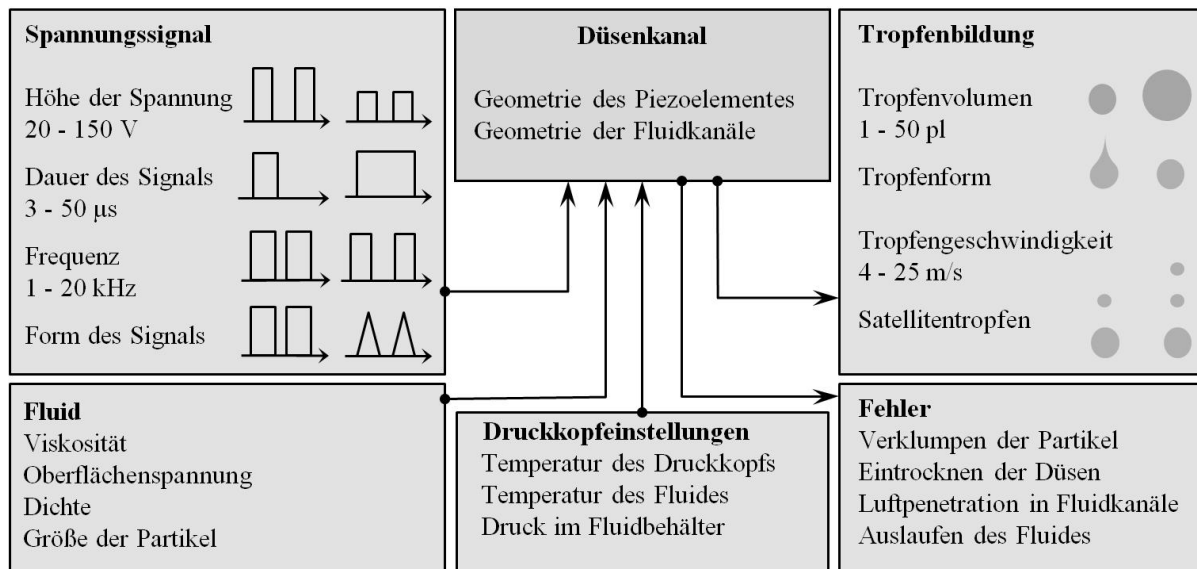
**Tabelle 2.1.:** Mögliches Wirkungsprinzip des Piezoelementes in Inkjetsystemen auf Basis der Piezotechnologie. Die gestrichelten Linien deuten die Verformung nach dem Anlegen einer Spannung an.

Bei der Funktion eines Düsenkanals von Piezo-Inkjetsystem sind mehrere Eingangs- und Ausgangsparameter sowie Eigenschaften des Düsenkanals selbst und des Druckkopfs wichtig. Die Abbildung 2.3 zeigt schematisch den Zusammenhang zwischen diesen

Parametern.

Unter Eingangsparameter fallen mehrere Einflussfaktoren, die in drei Gruppen eingeteilt werden können. Zum einen werden Eigenschaften des Spannungssignals, das von einer externen Spannungsquelle geliefert wird, durch die Höhe der Spannung, die Dauer, die Form und die Frequenz des Spannungssignals vorgegeben. Zum zweiten werden solche Eingangsparameter wie Viskosität, Oberflächenspannung, Dichte und Größe der Partikel durch die Eigenschaften des Fluids vorgegeben. Die dritte Gruppe ist durch die Einstellungen des Druckkopfs gegeben und beinhaltet die Temperatur des Druckkopfs und somit des Düsenkanalmaterials und des Fluids sowie den Druck im Fluidbehälter.

Die Ausgangsparameter können in zwei Gruppen unterteilt werden. Die erste Gruppe ist durch die Tropfenbildung gegeben und beinhaltet solche Ausgangsparameter wie Tropfenvolumen, Tropfenform, Tropfengeschwindigkeit und Anzahl von Satellitentropfen. Die zweite Gruppe der Ausgangsparameter ist durch die möglichen Fehler bei der Tropfenbildung gegeben und beinhaltet Verstopfen der Düsen und Fluidkanäle aufgrund von Verklumpen der Partikel im Fluid, Eintrocknen der Düsen, Luftpenetration in die Fluidkanäle sowie Auslaufen des Fluids aus den Düsen mit anschließendem Ausfallen der Düsenkanäle.



**Abbildung 2.3.:** Schematische Darstellung von Eingangs- und Ausgangsparametern in einem Düsenkanal bei Piezo-Inkjetsystemen. Insgesamt gibt es drei Gruppen von Eingangsparametern und zwei Gruppen von Ausgangsparametern.

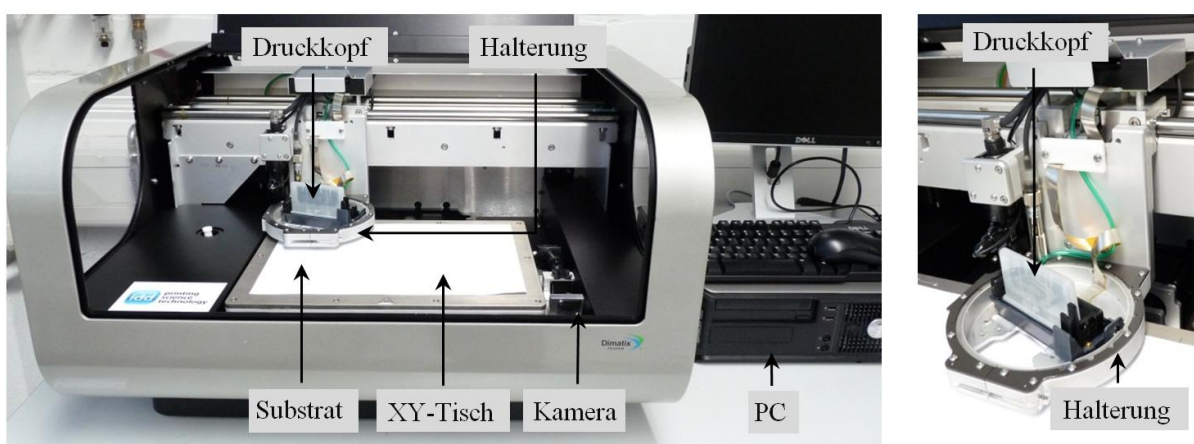
Zu einer fehlerfreien Funktion eines Druckkopfs sollen die Eingangsparameter auf die gewünschten Ausgangsparameter wie z.B. Tropfenvolumen angepasst werden [11]. Diese Anpassung ist aufgrund der Bauweise des Düsenkanals, die durch Geometrie des Piezoelementes und der Fluidkanäle gegeben ist, notwendig. Dabei können nicht alle Eingangsparameter

rameter frei geändert werden. So sind z.B. die Eigenschaften des Fluids wie Viskosität, Oberflächenspannung und Dichte oft nur geringfügig veränderbar [52]. In vielen Inkjetsystemen können auch weitere Eingangsparameter wie Temperatur des Druckkopfs und des Fluids nicht eingestellt werden.

Die Eingangsparameter wie z.B. Höhe der Spannung, Form des Spannungssignals, Druck im Fluidbehälter bestimmen die Ausgangsparameter wie z.B. Form, Volumen und Geschwindigkeit des Tropfens. Für eine fehlerfreie Funktion des Druckkopfs ist die Ermittlung der optimalen Eingangsparameter für das Druckergebnis entscheidend [11]. Sind die Eingangsparameter für den vorliegenden Druckkopf und das Fluid mit vorgegebenen Eigenschaften nicht optimal, so treten Probleme auf: Luftpenetration in einen der Fluidkanäle zum einen [53] sowie Verklumpen der Partikel im Fluid zum anderen können einen Ausfall der Düsenkanäle hervorrufen. Darüber hinaus kann das Druckergebnis durch fehlerhafte Tropfenbildung, wobei beispielsweise mehrere Satellitentropfen gebildet werden, negativ beeinflusst werden. Des Weiteren kann die Benetzung der Düsenplatte durch Auslaufen des Fluids aus der Düse [54] zu weiteren Problemen führen und den Ausfall der Düsenkanäle und des gesamten Druckkopfs hervorrufen.

### 2.3. Beschreibung des Labordruckers

In dieser Arbeit wird der Dimatix Material Printer der Serie 2800 untersucht. Der Labordrucker ist ein Piezo-Inkjetsystem und wird im Bereich des funktionalen Drucks und der Materialentwicklung aufgrund flexibler Steuerung und günstigen Druckköpfen eingesetzt.



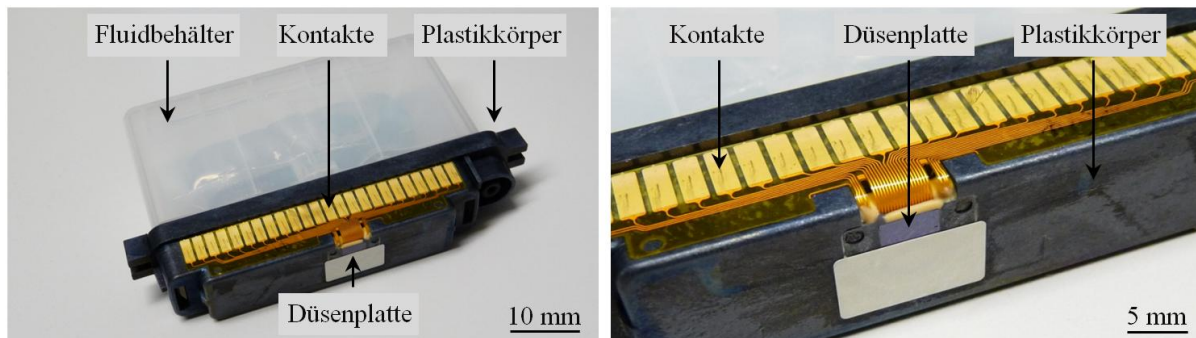
**Abbildung 2.4.:** Der Dimatix Material Printer der Serie 2800. Der Labordrucker beinhaltet unter anderem einen XY-Tisch zur Positionierung des Substrates und eine Kamera zur Kontrolle der Tropfenbildung. Rechts ist eine vergrößerte Aufnahme des Druckkopfs in der Halterung gezeigt.



Eine Aufnahme des Labordruckers ist in der Abbildung 2.4 gezeigt. Der Labordrucker beinhaltet unter anderem eine Kamera zur Kontrolle der Tropfenbildung und einen XY-Tisch zur Positionierung des Substrates. Die Druckköpfe können aus ihrer Halterung leicht hergenommen und gewechselt werden.

In der Abbildung 2.5 ist der auswechselbare Druckkopf DMC-11610 des Labordruckers gezeigt. Dieser beinhaltet einen Fluidbehälter, einen Plastikkörper mit Kontakten, die zur Spannungsquelle führen, und eine Düsenplatte mit 16 Düsenkanälen.

Die von der Spannungsquelle gelieferten Spannungssignale können in 1 kHz Schritten zwischen 1 und 20 kHz eingestellt werden und die Spannung variiert zwischen 0 und 40 V. Mit dem Labordrucker können Fluide mit einer Oberflächenspannung zwischen 2,8 N/m und 3,6 N/m sowie einer Viskosität zwischen 10 mPas und 20 mPas verdrukt werden. Auch Dispersionen mit Partikelgröße kleiner  $0,2 \mu\text{m}$  lassen sich verarbeiten.



**Abbildung 2.5.:** Links ist der Druckkopf DMC-11610 des Labordruckers abgebildet. Rechts ist eine vergrößerte Aufnahme gezeigt. Der Fluidbehälter wird in einem Plastikkörper positioniert, in dem sich eine Düsenplatte mit 16 Düsenkanälen befindet. Durch Kontakte an der Außenfläche des Plastikkörpers können die Düsenkanäle angesteuert werden.

Das nominelle Tropfenvolumen liegt bei 10 pl und die Tropfengeschwindigkeit variiert je nach eingestellter Spannung und Eigenschaften des Fluids zwischen 4 und 20 m/s. Es lassen sich Substrate der Größe A4 mit einer Auflösung zwischen 100 und 5080 dpi bedrucken.

## 2.4. Problemstellung und Herausforderung

Die Herausforderung bei der Anpassung der Eingangsparameter auf die Ausgangsparameter besteht darin, dass eine Optimierung von nur einem Ausgangsparameter ohne den Einfluss auf andere unmöglich ist [11]. Aus diesem Grund werden in der Regel einzelne Ausgangsparameter ohne Rücksicht auf andere optimiert. So kann z.B. die Tropfenform

optimiert werden, ohne die Tropfengeschwindigkeit und das Tropfenvolumen zu berücksichtigen [55]. Eine Optimierung der Tropfengeschwindigkeit kann anschließend vorgenommen werden, wobei man bestrebt ist, die Tropfenform möglichst zu erhalten. Die Optimierung der Eingangsparameter wird überwiegend experimentell durchgeführt und nimmt viel Zeit in Anspruch [56][57][58].

Bei besonders anspruchsvollen Fluiden werden oftmals keine optimalen Eingangsparameter gefunden. Da die Optimierung experimentell abläuft, bleibt es unklar, ob optimale Eingangsparameter für das Fluid und den vorliegenden Druckkopf nicht existieren oder diese lediglich im Experiment nicht bestimmt werden konnten.

Eine weitere Herausforderung ist, dass bei dem experimentell festgelegten Optimum seine Stabilität nicht bestimmt werden kann. Somit können bei geringsten Änderungen der Eingangsparameter auf Grund von Dichteunterschieden im Fluid oder Instabilität des Spannungssignals die Ausgangsparameter negativ beeinflusst werden, was den Ausfall der Düsenkanäle hervorrufen kann.

## **2.5. Stand der Forschung**

Seit einigen Jahren versuchen Forscher einen Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsparametern zu ermitteln und das Verhalten von Düsenkanälen und gesamten Druckköpfen fluidabhängig zu beschreiben. Das Problem umfasst Grenzgebiete wie Fluid-dynamik, Elektrotechnik, Mechanik und Optik und wird aus mehreren Blickrichtungen betrachtet.

### **2.5.1. Experimentelle Studien und Simulationen**

In Experimenten wurden sowohl mehrere als auch einzelne Eingangsparameter und dessen Wirkung auf die Ausgangsparameter untersucht. Dabei beschränken sich diese Studien in den meisten Fällen auf rechteckige oder dreieckige Formen des Spannungssignals [55][59] oder auf wenige Fluide [60][57][61][58], da der experimentelle Aufwand ansonsten zu groß ist. Bei der Variation von mehreren Parametern des Spannungssignals wurden die Geschwindigkeit und das Volumen des Tropfens in Abhängigkeit von der Frequenz und der Form des Spannungssignals [55][60][62], die Auswirkung der Dauer des Spannungssignals auf die Tropfengeschwindigkeit [59][57][53], die Anzahl der Satellitentropfen ebenso wie das Auftreffen der Tropfen auf Substrat in Abhängigkeit von Form und Dauer des Spannungssignals [63] untersucht. Das Ziel solcher Untersuchungen liegt in der Regel bei der Verbesserung der Tropfenbildung und der Minimierung der

Anzahl von Satellitentropfen, bei der Erhöhung der Druckgeschwindigkeit durch Erhöhung der Frequenz des Spannungssignals [64], bei der Optimierung des Tropfenvolumens für spezielle Anwendungen [65][66] sowie der Filmbildung [67] auf dem Substrat und Untersuchung von weiteren Effekten wie Coffee-Stain Effect [68].

Auch die optimalen Fluideigenschaften für die vorgegebenen Druckköpfe wurden in experimentellen Studien gesucht und Ausgangsparameter wie beispielweise Tropfenform, Tropfenvolumen und Tropfengeschwindigkeit betrachtet [52][69]. Auf diese Weise konnten optimale Fluideigenschaften bestimmt werden, wobei diese ausschließlich für den in der Studie eingesetzte Druckköpfe gelten und auf einen anderen Druckkopf unter Umständen nicht übertragbar sind. Um den experimentellen Aufwand zu reduzieren, wurde der Einfluss der Form des Spannungssignals sowie Höhe der Spannung hier nicht analysiert, obwohl andere Studien belegen, dass durch höhere Spannung ebenso hochviskose Fluide gedruckt werden können [70].

Die experimentellen Ergebnisse wurden von mehreren Forschern in Simulationsprogrammen nachgebildet. Fluideigenschaften wie z.B. Oberflächenspannung [71] und Viskosität wurden einbezogen und zum Teil auch das Auftreffen des Tropfens auf das Substrat simuliert [72]. Dabei werden Tropfengeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Dauer des Spannungssignals für Düsenkanäle mit Piezoröhrchen, die in der Regel nur einen Fluidkanal beinhalten [73] und für komplexere Düsenkanäle mit mehreren Fluidkanälen unter Einbeziehung anderer Eingangsparameter [74] beschrieben.

Weitere Forschergruppen versuchen die Tropfenbildung und die Dynamik des Fluids in einem Düsenkanal zu simulieren [75][76], unter anderem auch unter Einbeziehung von physikalischen Kräften wie beispielsweise Oberflächenspannung des Fluids und Gravitationskraft [77]. Dabei werden sowohl komplexe Inkjetsysteme [75][77] als auch einfache Inkjetsysteme mit Piezoröhrchen und einem Fluidkanal [78] numerisch simuliert. Als Ansätze dienen mehrere physikalische Modelle: Größen wie Impuls und Masse des Fluids werden mit Oberflächenspannung, Viskosität und Dichte des Fluids verbunden. In der Regel werden Simulationsergebnisse experimentell validiert. Weitere Veröffentlichungen zeigen Vergleich von Simulationen, die auf verschiedenen Modellen basieren [79].

Um die Rechenzeit für komplexe Düsenkanäle zu verkürzen, gehen die meisten Simulationen von einem inkompressiblen newtonischen Fluid aus. Für einfache Düsenkanäle wurden jedoch unter anderem kompressible Fluide simuliert [80][81]. Die Simulationsprogramme wurden auch miteinander verglichen [82], um die Auswirkung numerischer Algorithmen auf das Endergebnis zu untersuchen.

Ein weiterer Ansatz ist, den Verlauf des Druckes in dem Düsenkanal mit den Ausgangsparametern wie Tropfenform und -volumen zu verknüpfen. Die Experimente auf diesem Ge-

biet werden auf vielfältige Weise durchgeführt. In einigen Berichten wird der Fluidfluss in dem nachgebauten durchsichtigen Druckkopf durch die kleinen, dem Fluid beigemischten Partikel visualisiert und durch eine optische Messung der Geschwindigkeit und der Fließrichtung der beigemischten Partikel [54] analysiert. Andere Forscher nutzen wiederum die Eigenschaft des Piezoelements zur Rückkopplung und bestimmen so den Verlauf des Druckes in den Fluidkanälen nach der Tropfenbildung [83][84][85].

Bei diesen Messungen werden sensorische Eigenschaften des Piezoelements zur Messung eingesetzt und die durch den Druck in Fluidkanälen und nachfolgende Verformung des Piezoelements erzeugte Spannung wird gemessen [83][84][85]. Dabei können Spannungssignale vom Piezoelement nur dann aufgenommen werden, wenn das Piezoelement nicht mehr als Aktor dient und nicht von einer externen Spannungsquelle eingespeist wird. Das schränkt die Zeiten des Monitorings ein, was insbesondere bei höheren Frequenzen kritisch sein kann. Da die Zeiten zwischen zwei Spannungssignalen sich verkürzen, bleibt nur wenig Zeit, in der das Piezoelement als Sensor eingesetzt werden kann. Außerdem wird die durch den Druck im Fluidkanal erzeugte Spannung über die gesamte Fläche des Piezoelements integriert.

Unter anderem wurden diese Messungen zur Bestimmung der optimalen Eingangsparameter, zur Verbesserung der Geometrie der Düsenkanäle [84] und zur Verknüpfung der Fluideigenschaften und des Verlaufs des Druckes [86] eingesetzt, wobei die Spannungssignale, die an das Piezoelement gesendet werden, als rechteckig angesehen werden. Dies trifft lediglich auf wenige Fälle zu.

Die Messung des Rückkopplungssignals am Piezoelement wurde nicht nur zur Bestimmung des Druckverlaufs in den Fluidkanälen, sondern auch zur Untersuchung der Fehler [81][83][87], wie diese in der Abbildung 2.3 auf der Seite 7 vorgestellt sind, genutzt. Die Forscher gehen sowohl auf die Probleme der Wiederbefüllung, mit dem Ziel die Fehler in der Tropfenbildung durch andere Geometrie [87] zu umgehen und das Übersprechen zu minimieren [81], als auch auf die nähere Betrachtung der Dynamik der in die Fluidkanäle durch die Düse eingedrungenen Luftblasen, ein [83].

Die in Fluidkanäle eingeschlossenen Luftblasen wurden auch optisch untersucht [88] und die Dynamik der Luftblase in Fluidkanälen [83][88] und deren Anwachsen infolge der Oszillation im Fluid wurden betrachtet [89][90]. Zum Teil wurde auch die kritische Größe der Luftblase, die zur Ausfall der Düse führt, und deren Auswirkung auf Ausgangsparameter wie Tropfenvolumen und Tropfenform [91] untersucht und bestimmt. Hierzu wurden auch Experimente und Simulationen in einfachen Düsenkanälen durchgeführt [92]. Weitere Mängel wie beispielsweise das Auslaufen des Fluids aus den Düsen infolge des Überdrucks in dem Düsenkanal wurden experimentell untersucht. Dabei standen das Fließmuster des Fluids und die Auswirkung des dünnen Fluidfilms auf der Düsenplat-

te auf die Ausgangsparameter wie Tropfengröße und Tropfengeschwindigkeit im Vordergrund [93]. Zur Untersuchung des Verlaufs des Druckes in Düsenkanälen wurden ebenfalls numerische Studien durchgeführt.

Zum Teil wurde auch die Ausbreitung des Drucks in Abhängigkeit von den Fluideigenschaften in einem einfachen Düsenkanal mit Piezoröhrchen untersucht [94]. Ausführliche theoretische Studien des Druckverlaufs und dessen Auswirkung auf die Tropfenbildung [46] sowie Studien der Ausgangsparametern wie Tropfenform und Tropfenvolumen mittels einer Finite-Elemente-Methode [95] sind für diese Geometrien der Düsenkanäle ebenfalls bekannt.

Weitere Berichte beschreiben die Ausbreitung der Druckwellen in dem Piezoelement selbst [96], wobei die Umgebungsbedingungen wie beispielsweise Viskosität der umgebenden Substanz und Temperatur variiert werden.

Zum größten Teil werden die Untersuchungen an den im Labor mit MEMS-Technik erstellten Druckköpfen [81][41] durchgeführt. Aus dem Stand der Forschung ist weiterhin bekannt, dass industriell erhältliche Druckköpfe in Kooperation mit dem Hersteller [83] untersucht sowie theoretische Studien anhand von experimentellen Vergleichen auf diesem Forschungsgebiet durchgeführt wurden. Die Anzahl dieser Studien begrenzt sich jedoch auf wenige Sonderfälle.

Zur Überwachung der Funktion der Düsenkanäle im Druckkopf werden Kontrollsysteme eingesetzt, die beispielsweise Druck an der Düse [97], Tropfenvolumen oder auch Tropfenmasse detektieren. Die meisten Inkjetsysteme weisen optische Auswertungssysteme auf. Am Einsatz von Rückkopplungsmessungen zur Detektion von Luftblasen wird zur Zeit noch gearbeitet [83].

Weitere Forschungsarbeiten laufen im Bereich der Konstruktion und der Optimierung der Düsenkanäle und der Druckköpfe [87][98]. Auf diesem Gebiet werden im allgemeinen Simulationen angewendet, um die optimale Geometrie der Düsenkanäle zu bestimmen und das Verhalten des Druckkopfs noch vor der Fertigung vorherzusagen, wobei in den meisten Fällen Durchmesser und Geometrie der Düsen [99] und Breite der Fluidkanäle [87][100][101] variiert werden. Konstruktionen für spezielle Anwendungen, unter anderem Piezo-Inkjetsysteme für Fluide mit hoher Viskosität [70] oder für biologische Zwecke [98] wurden ebenso untersucht. Es werden Eigenfrequenzen von Druckköpfen und Düsenplatten bestimmt [102] und die Abhängigkeit der Tropfengröße und der Tropfenform von der Geometrie der Düsenkanäle getestet. Weiterhin wurde auch der Einfluss der Geometrie von Fluidkanälen auf die Ausgangsparameter untersucht [87][86].

Die Experimente im Bereich der Konstruktion und der Optimierung dienen der Validierung der Simulation und dem Testen der Qualität eines neu entworfenen und hergestellten

Druckkopfes [66][74][103][104]. Oftmals werden Simulationen vergleichsweise zwischen verschiedenen Konstruktionen der Druckköpfe und Düsenkanäle eingesetzt [73][105]. Simulationen können gleichermaßen zur Minimierung von Fehlern wie beispielweise Ansprechen der benachbarten Düsenkanäle durch das Spannungssignal beitragen [106].

Zur Tropfenbildung werden teilweise andere Möglichkeiten in Betracht gezogen [107] und die Methoden zur genaueren Messung des Tropfenvolumens und der Tropfenmasse für Piezo-Inkjetsysteme finden in der Literatur weitere ausführliche Beschreibung [108].

Da experimentelle Ergebnisse und Simulationen nur für bestimmte Piezo-Inkjetsysteme oder nur für bestimmte Fluide gelten, sind diese nur schwer auf andere Piezo-Inkjetsysteme und Fluide übertragbar. Zwar ist der Trend bei der Optimierung der Eingangsparameter auf die Ausgangsparameter wie z.B. der Zusammenhang zwischen der Spannungshöhe und der Tropfengeschwindigkeit bekannt, jedoch gelten die in Experimenten erzielte Ergebnisse nur für das ein gegebene Piezo-Inkjetsystem und ein Fluid. Somit wird eine experimentelle Optimierung bei jedem anderen Piezo-Inkjetsystem und jedem anderen Fluid notwendig, was viel Zeit in Anspruch nimmt.

### **2.5.2. Modelle und Theorien**

Eine theoretische Darstellung der Tropfenbildung wurde von mehreren Forschergruppen [78][109], teilweise mit einer experimentellen Validierung [110][111] unternommen. Dabei wird in der Regel nur die Düse betrachtet, an der durch Druck ein Tropfen gebildet wird. Die Instabilität des Fluidstrahls [111][112] an sich ist bereits intensiv untersucht und verstanden worden. Eine Übertragung der aufgestellten Theorien auf die Piezo-Inkjetsysteme ist jedoch problematisch, da die Annahme eines konstanten Fluidflusses hier nicht gilt.

Weitere Modelle werden in Simulationsprogrammen eingesetzt. Hier wird die Simulation in vielen Fällen auf einen bestimmten Druckkopf beschränkt und zur Bestimmung der Eigenfrequenzen des Druckkopfs oder Düsenplatte [113] und Validierung der Gesamtkonstruktion genutzt [66]. In einigen Fällen wurde auf die theoretische Modellbildung zur Beschreibung der Tropfenbildung zurückgegriffen [41][64], vor allem um einen neu konstruierten Druckkopf zu charakterisieren und die Phänomene in dem Druckkopf zu beschreiben.

Theoretische Problembeschreibungen zur Dynamik der in Fluidkanal eingeschlossenen Luftblase wurden anhand von ausführlichen Berichten veröffentlicht [114]. Hier werden in der Regel Theorien aus dem Kapillarfluss der Luftblase in einem Kanal [115][116][117] und deren Verformung in solchen Kanälen [118] benutzt.

Nur einige Forscher haben sich mit der Beschreibung der Piezo-Inkjetsysteme als Gesamtsysteme beschäftigt [46][95][119]. Die Wissenschaftler versuchten die Theorie der Ausbreitung von Druckwellen im Fluid auf die Piezo-Inkjetsysteme zu übertragen, um ein tieferes Verständnis zu gewinnen. Die Anstrengungen waren sowohl an einfacheren Düsenkanälen wie die mit Piezoröhrchen [46][56] als auch zum Teil an komplexeren Düsenkanälen[119] erfolgreich, wobei im letzten Fall eine Optimierung der Druckgeschwindigkeit durch Frequenz des Spannungssignals im Vordergrund stand.

Somit sind durchaus mehrere Theorien bekannt, die einzelne Vorgänge in Piezo-Inkjetsystemen beschreiben. Jedoch ist eine allgemeine Beschreibung des kompletten Piezo-Inkjetsystems sowie Verbindung der Eingangsparameter mit den Ausgangsparametern in einem Modell bis jetzt unbekannt.

### 2.5.3. Netzwerktheorie

Die Netzwerktheorie wird im Bereich der Mikrosystemtechnik und Mechatronik zur Charakterisierung bestehender und zum Entwurf neuer Systeme angewendet [120][121].

Forschungsziele auf diesem Gebiet sind nicht nur die Beschreibung der bestehenden Systeme [122][123][124], sondern auch die Herleitung der Netzwerkbeschreibungen für neue komplexe Bauteile wie beispielsweise piezoelektrische Biegeelemente [125][126]. Unter anderem wird auch an der Verknüpfung zwischen Netzwerktheorie und Finite-Elemente-Methode gearbeitet, wobei diese zur Beschreibung komplexer dreidimensionaler Systeme [127][128][129] eingesetzt werden.

Die Netzwerktheorie zur Beschreibung akustischer Systeme wie beispielweise Differenzdrucksensoren [124] und Ultraschall-Mikroaktoren [130] wurde bereits eingesetzt. Eine Übertragung der Netzwerktheorie auf Piezo-Inkjetsysteme ist bis jetzt jedoch unbekannt.

## 2.6. Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist, die Netzwerktheorie, die das Aufstellen eines einheitlichen Modells zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens elektrischer, mechanischer, mechanisch-rotatorischer und akustischer Systeme erlaubt, auf Piezo-Inkjetsysteme zu übertragen und die Übertragbarkeit an einem Labordrucker zu validieren.

Dazu werden im Kapitel 3 die Grundlagen der Netzwerktheorie beschrieben, die für das weitere Verständnis notwendig sind. Die Beschreibung physikalischer Elemente der Düsenkanäle mit konzentrierten Parametern, die in der Netzwerktheorie bereits bekannt

sind, werden im Kapitel 4 vorgestellt. Die in der Netzwerktheorie fehlende Modellabbildungen spezieller physikalischer Elemente der Düsenkanäle werden hier zusätzlich hergeleitet. Im Kapitel 5 werden die Modellabbildungen physikalischer Elemente der Düsenkanäle mit verteilten Parametern beschrieben. Die in den Kapiteln 4 und 5 dargestellten und hergeleiteten allgemeinen Modellabbildungen sind auf mehrere Inkjetsysteme auf Basis der Piezotechnologie übertragbar.

Im Kapitel 6 wird ein Modell des am Institut für Druckmaschinen und Druckverfahren vorhandenen Labordruckers erstellt und die Modellparameter werden für das vorliegende Piezo-Inkjetsystem berechnet. Anschließend wird im Kapitel 7 das erstellte Modell charakterisiert und der Einfluß einzelner Modellparameter auf das dynamische Verhalten des Labordruckers analysiert. Auch der Einfluss der bei der Modellbildung des Labordruckers getroffenen Annahmen wird hier diskutiert.

Um die Übertragbarkeit der Netzwerktheorie auf Piezo-Inkjetsysteme zu zeigen, wird das Modell des Labordruckers anschließend in optischen und elektrischen Messungen validiert. Die Ergebnisse der Experimente und der Validierung werden im Kapitel 8 dargestellt. In optischen Messungen wird die Reproduzierbarkeit und die Stabilität der Tropfenbildung des Labordruckers untersucht und so die Genauigkeit des Labordruckers bestimmt. Die elektrischen Messungen werden zur Bestimmung des tatsächlichen dynamischen Verhaltens des Labordruckers eingesetzt. Das modellierte und das experimentell bestimmte dynamische Verhalten werden anschließend verglichen. Eine Anpassung der Modellparameter auf das experimentell bestimmte Verhalten dient der genauen Untersuchung der Unterschiede zwischen Modell und Realität.

Abschließend werden im Kapitel 9 eine Zusammenfassung und ein Ausblick zu den in dieser Arbeit vorgestellten Inhalten gegeben.



---

## 3. Grundlagen der Netzwerktheorie

Die Theorie der Netzwerke beschreibt elektrische, mechanische, mechanisch-rotatorische und akustische Elemente einer physikalischen Struktur in einem einheitlichen Modell und wird in Bereichen der Mikrofluidik und Akustik zur Beschreibung und Charakterisierung neuer und bestehender Strukturen eingesetzt. Auch ausführliche Darstellungen der Netzwerktheorie in Büchern von A. Lenk [131][132] und R.G. Ballas et al [133].

Als Basis für die Netzwerktheorie wird die Signal- und Systemtheorie der Elektrotechnik herangezogen [121][131]. Die dort angewendete Beschreibungsmethode für elektrische Strukturen wird auf mechanische, mechanisch-rotatorische und akustische Strukturen übertragen. Da die Grundbeschreibung mechanischer, mechanisch-rotatorischer und akustischer Strukturen ähnlich wie die elektrische Struktur durch Differenzialgleichungen erfolgt, ist der Übergang zu der einheitlichen Beschreibung aller dieser Strukturen gegeben.

In diesem Kapitel werden zuerst die bereits bekannten Grundlagen der Netzwerktheorie in einer allgemeinen Form vorgestellt und anschließend die Isomorphie zwischen den elektrischen, mechanischen und akustischen Strukturen beschrieben. Auf die Darstellung mechanisch-rotatorischer Strukturen wird an dieser Stelle verzichtet, da diese für die Piezo-Inkjetsysteme irrelevant sind. Unter anderem werden auch die Annahmen der Netzwerktheorie diskutiert.

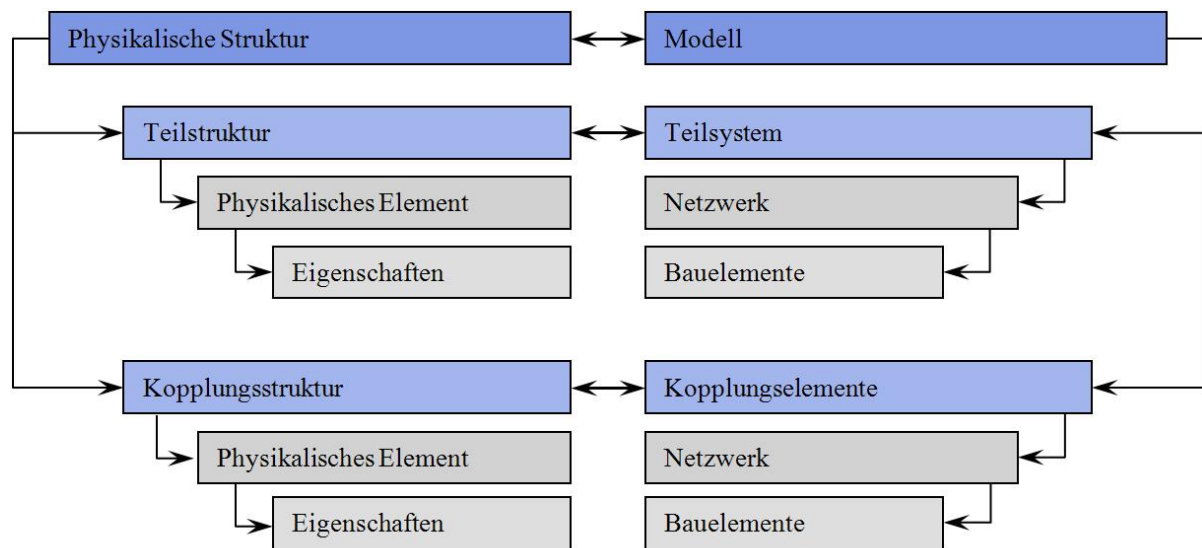
### 3.1. Allgemeine Struktur der Netzwerktheorie

Der Zusammenhang zwischen einem Netzwerkmodell und einer physikalischen Struktur ist in der Abbildung 3.1 gezeigt. Eine physikalische Struktur beinhaltet mehrere Teilstrukturen, die elektrisch, mechanisch oder akustisch sein können. Diese werden im Modell durch Teilsysteme abgebildet, die ebenfalls elektrisch, mechanisch oder akustisch sind.

Jede Teilstruktur besteht aus mehreren physikalischen Elementen, die im Modell durch Netzwerke abgebildet werden. Hier wird die Zugehörigkeit physikalischer Elemente zu

einzelnen Teilstrukturen durch die für die gesamte physikalische Struktur entscheidenden Eigenschaften der physikalischen Elemente gegeben.

Das Netzwerk ist die Modellabbildung des physikalischen Elementes und beschreibt sein Verhalten im Modell. Somit können elektrische, mechanische und akustische Netzwerke unterschieden werden. Eine Teilstruktur kann aus mehreren physikalischen Elementen bestehen und somit im Teilsystem durch mehrere Netzwerke modelliert werden. Die Eigenschaften physikalischer Elemente werden im Modell durch Bauelemente präsentiert, die das kleinste Element des Netzwerkmodells darstellen [131][121].



**Abbildung 3.1.:** Links ist der Aufbau einer einfachen physikalischen Struktur aus einer Teilstruktur und einer Kopplungsstruktur abgebildet. Rechts ist die dazugehörige Abbildung im Modell.

Die Vorgänge in einzelnen Teilstrukturen werden durch mehrere physikalische Größen beschrieben. So sind elektrische Teilstrukturen durch den Zusammenhang zwischen der Spannung  $u$  und dem Strom  $i$ , mechanische Teilstrukturen durch den Zusammenhang zwischen der Kraft  $F$  und der Geschwindigkeit  $v$  und akustische Teilstrukturen durch den Zusammenhang zwischen dem Druck  $p$  und dem Volumenfluss  $q$  gegeben. Um diese Größen zu verknüpfen, werden in der Netzwerktheorie Kopplungselemente definiert, die ebenfalls reale physikalische Kopplungsstrukturen abbilden. Wie Teilstrukturen auch, bestehen diese aus physikalischen Elementen, die durch Netzwerke modelliert werden.

## 3.2. Annahmen

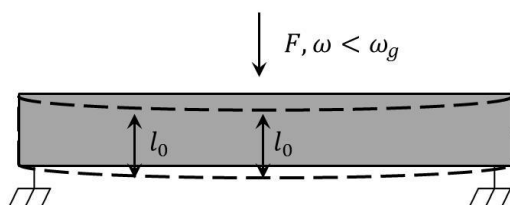
Der Netzwerktheorie liegt die Annahme zu Grunde, dass Vorgänge in einer physikalischen Struktur durch differenzielle Zusammenhänge physikalischer Größen beschrieben

werden können. Ist diese Annahme nicht gerechtfertigt, kann das Modell nicht angewendet werden. Praktische Anwendungen zeigen, dass mehrere akustisch-mechanische Strukturen [131][121][124][130] durch das Netzwerkmodell mit einer guten Übereinstimmung beschrieben werden können und somit die Annahme differenzieller Zusammenhänge in solchen Strukturen gerechtfertigt ist.

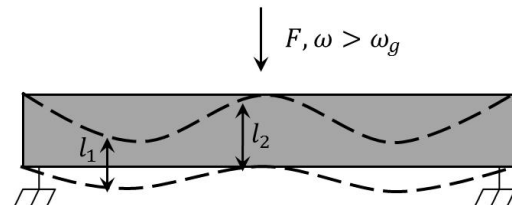
Bei der Netzwerktheorie unterscheidet man zusätzlich zwischen ortsunabhängigen, sogenannten konzentrierten und ortsabhängigen, sogenannten verteilten Parametern.

Im Fall konzentrierter Parameter wird angenommen, dass keine Wellenlängen in den modellierten Teilstrukturen auftreten, die in der Größenordnung der Elementenabmessungen physikalischer Elemente liegen und somit keine ortsabhängige Verformung der physikalischen Elemente auftritt. Dieser Fall ist für eine mechanische Schicht in der Abbildung 3.2 dargestellt. Hier wirkt auf die Schicht eine Kraft  $F$  mit einer Frequenz  $\omega$ , die kleiner als die Grenzfrequenz  $\omega_g$  ist. Die Schicht verformt sich zwar, ihre Abmessungen bleiben jedoch ortsunabhängig.

Im Fall verteilter Parameter wird angenommen, dass durch hohe Frequenzen, die auf physikalische Elemente wirken, eine veränderte Massenverteilung innerhalb der physikalischen Elemente auftritt und die Beschreibung der physikalischen Elemente ortsabhängig wird.



**Abbildung 3.2.:** Eine mechanische Schicht unter der Einwirkung der Kraft  $F$  mit einer Frequenz  $\omega$ , die kleiner als Grenzfrequenz  $\omega_g$  ist.



**Abbildung 3.3.:** Eine mechanische Schicht unter der Einwirkung der Kraft  $F$  mit einer Frequenz  $\omega$ , die größer als Grenzfrequenz  $\omega_g$  ist.

Der Fall verteilter Parameter ist für eine mechanische Schicht in der Abbildung 3.3 gezeigt. Hier wirkt auf die mechanische Schicht eine Kraft  $F$  mit einer Frequenz  $\omega$ , die größer als die Grenzfrequenz  $\omega_g$  ist. Durch hohe Frequenz tritt eine ortsabhängige Verteilung der Masse in der Schicht auf und die Annahme konzentrierter Parameter gilt nicht.

Zur Bestimmung der Grenzfrequenz  $\omega_g$  des einzelnen physikalischen Elementes wird die

Schallgeschwindigkeit  $v_S$  in seinem Material durch seine längste Abmessung  $l$  geteilt:

$$\omega_g = 2\pi \frac{v_S}{l}. \quad (3.1)$$

Diese Gleichung gilt sowohl für mechanische als auch für akustische physikalische Elemente.

Um der Annahme konzentrierter Parameter gerecht zu werden, sollen die Frequenzen  $\omega$ , die auf physikalische Elemente wirken, viel kleiner als die Grenzfrequenzen  $\omega_g$  dieser physikalischen Elemente sein. In den meisten Fällen ist der Faktor 10 bereits ausreichend. Da die Schallgeschwindigkeit sowie Abmessungen einzelner physikalischer Elementen sich von einander unterscheiden, sind auch die Grenzfrequenzen für einzelne physikalische Elemente unterschiedlich.

Werden die Grenzfrequenzen nicht überschritten, so können Eigenschaften physikalischer Elemente durch ortsunabhängige Bauelemente modelliert werden. Andersfalls kann nur eine näherungsweise gute Modellabbildung des physikalischen Elementes bei hohen Frequenzen erreicht werden. Um eine gute Modellabbildung zu gewährleisten, werden physikalische Elemente durch Reihenschaltung mehrerer infinitesimaler Elemente dargestellt [124]. Finite-Elemente-Methode kann fallabhängig auch mit der Netzwerktheorie verbunden werden [127][128]. Die Anzahl infinitesimaler Elemente und die Modellabbildung dieser Elemente hängen im Wesentlichen von dem Anwendungsfall ab.

Die Modellabbildungen physikalischer Elemente mit konzentrierten Parametern können mit den Modellabbildungen physikalischer Elemente mit verteilten Parametern in einem Modell vereint werden [121][124]. Dadurch können nur einzelne physikalische Elemente mit verteilten Parametern abgebildet werden, um das gesamte Modell übersichtlich zu halten.

### 3.3. Signalbeschreibung

Die Annahme differenzialer Zusammenhänge im Zeitbereich erlaubt einen beliebigen zeitperiodischen Signalfluss in einer Teilstruktur mittels einer Fourier-Reihe zu beschreiben [134][135]. Somit entsteht die Möglichkeit, Zusammenhänge zwischen mehreren Größen im Bildbereich wiederzugeben. Weiterhin führt das zu einer vereinfachten Darstellung der differenzialen Zusammenhänge durch lineare Gleichungen mit komplexen Variablen. Die Überführung differenzialer Gleichungssysteme in den Bildbereich führt bei einem un-

endlichen Zeitintervall zu keinem Datenverlust, so dass die beiden Beschreibungen identisch sind [136].

Aus diesen Gründen wird in dieser Arbeit eine vereinfachte Darstellung im Bildbereich eingesetzt und die Vorteile der linearen Beschreibung von differenzialen Zusammenhängen genutzt.

### 3.4. Abstraktes lineares Netzwerk

Der Signalfluss in einem abstrakten Netzwerk kann erstmal unabhängig von übergeordnetem Teilsystem durch eine Flusskoordinate  $\underline{\lambda}$  und eine Differenzkoordinate  $\underline{\mu}$  dargestellt werden. Zwei Quellen liefern diese Koordinaten: die  $\underline{\mu}$ -Quelle liefert die Differenzgröße  $\underline{\mu}_0$  unabhängig von der Flussgröße  $\underline{\lambda}$  und die  $\underline{\lambda}$ -Quelle liefert die Flussgröße  $\underline{\lambda}_0$  ebenfalls unabhängig von der vorliegenden Differenzgröße  $\underline{\mu}$ , wie in den Abbildungen 3.4 und 3.5 dargestellt.

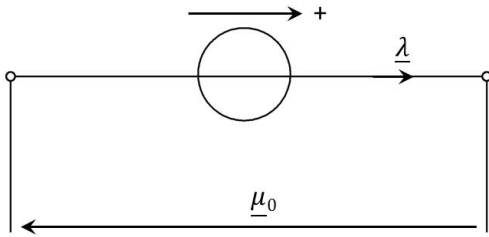


Abbildung 3.4.:  $\mu$ -Quelle: Unabhängig von der Flussgröße  $\lambda$  liegt eine Differenzgröße  $\mu_0$  vor.

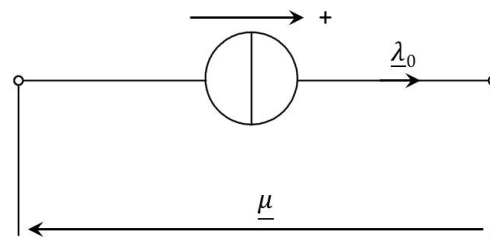


Abbildung 3.5.:  $\lambda$ -Quelle: Unabhängig von der Differenzgröße  $\mu$  liegt eine Flussgröße  $\lambda_0$  vor.

Die beiden Koordinaten  $\underline{\lambda}$  und  $\underline{\mu}$  stehen über die Bauelemente  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  miteinander in Verbindung:

$$\underline{\mu} = s\alpha\underline{\lambda}, \quad \underline{\mu} = \frac{1}{s\beta}\underline{\lambda}, \quad \underline{\mu} = \gamma\underline{\lambda}, \quad (3.2)$$

wobei die Größe  $s$  eine komplexe Frequenz darstellt und wie folgt definiert ist:

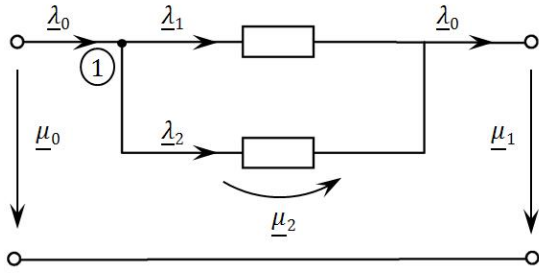
$$s = j\omega + \sigma.$$

Die Einführung der imaginären Frequenz  $j\omega$  an dieser Stelle bedeutet im Zeitbereich einen Übergang von reellen Sinusfunktionen zu Exponentialfunktionen. Zusätzliche Er-

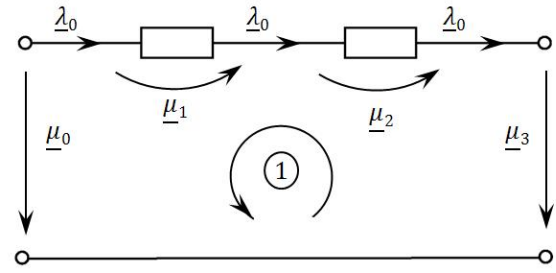
weiterung der komplexen Frequenz  $s$  mit  $\sigma$  führt nun zu abfallenden und anwachsenden Exponentialfunktionen im Zeitbereich.

Den Grundlagen der Elektrotechnik entsprechend zeigt das Bauelement  $\alpha$  ein induktives Verhalten, das Bauelement  $\beta$  ein kapazitives Verhalten und das Bauelement  $\gamma$  entspricht einem ohmschen Widerstand [137].

Die einzelnen Bauelemente können in einem Netzwerk entweder parallel oder in Reihe geschaltet werden, wie in der Abbildung 3.6 und 3.7 gezeigt.



**Abbildung 3.6.:** Parallelschaltung einzelner Bauelemente in einem Netzwerk. Mit 1 ist der Knotenpunkt gekennzeichnet.



**Abbildung 3.7.:** Reihenschaltung der Bauelemente in einem Netzwerk. Mit 1 ist der Umlauf des Netzwerkes gekennzeichnet.

Innerhalb eines Netzwerkes gelten Erhaltungsregeln für die Differenzkoordinate  $\underline{\mu}$  und die Flusskoordinate  $\underline{\lambda}$ . Dabei gilt für die Koordinate  $\underline{\mu}$ , dass die Summe aller  $\underline{\mu}_n$  im Umlauf gleich Null und für die Koordinate  $\underline{\lambda}$ , dass alle  $\underline{\lambda}_n$  im Knoten gleich Null [121] sein müssen:

$$\sum_{\text{Masche}} \underline{\mu}_n = 0, \quad \sum_{\text{Knoten}} \underline{\lambda}_n = 0. \quad (3.3)$$

Somit ergibt sich für die Flusskoordinaten in der Abbildung 3.6 aus dem Knotensatz und für die Differenzkoordinaten in der Abbildung 3.7 aus dem Maschensatz folgender Zusammenhang:

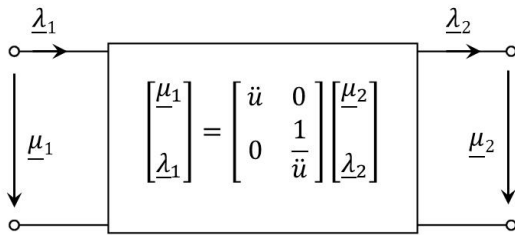
$$\sum_1 \underline{\lambda}_n = \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \quad \sum_1 \underline{\mu}_n = \mu_0 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 = 0. \quad (3.4)$$

Durch das Zusammenschalten von einzelnen Bauelementen in einem Netzwerk kann dessen Verhalten an das Verhalten des physikalischen Elementes angepasst werden.

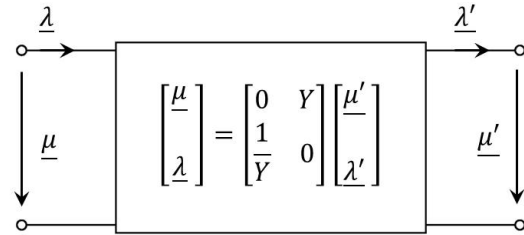
Einzelne Netzwerke in einem Teilsystem können entweder unmittelbar oder durch Transformatoren miteinander verbunden werden. Ein Transformator ändert durch seine Wir-

kung die Größe der beiden Koordinaten  $\underline{\mu}$  und  $\underline{\lambda}$ . Den idealen Transformator zeigt die Abbildung 3.8, wobei die Größe  $\ddot{u}$  das Übersetzungsverhältnis der Leistung darstellt, das aus dem Produkt der beiden Größen  $\underline{\mu}$  und  $\underline{\lambda}$  resultiert.

Einzelne Teilsysteme werden durch die Kopplungselemente verbunden. Im Gegensatz zu den Transformatoren werden hier zwei Koordinatenpaare  $\underline{\lambda}, \underline{\lambda}'$  und  $\underline{\mu}, \underline{\mu}'$  einzelner Teilsysteme miteinander gekoppelt. Die Kopplungselemente stellen physikalische Kopplungsstrukturen dar, die durch Bauelemente und Gyratoren beschrieben werden. Ein Gyrator führt die Koordinate  $\underline{\lambda}$  zur Koordinate  $\underline{\mu}'$  und  $\underline{\mu}$  zur Koordinate  $\underline{\lambda}'$ , dieser Vorgang ist in der Abbildung 3.9 dargestellt.



**Abbildung 3.8.:** Idealer Transformator zur Kopplung einzelnen Netzwerke in einem Teilsystem.



**Abbildung 3.9.:** Idealer Gyrator zur Kopplung einzelner Netzwerke verschiedenen Teilsystemen.

Da hier zwei Koordinatenpaare gekoppelt werden, ist die gyratorische Konstante  $Y$  im Gegensatz zum Übersetzungsverhältnis  $\ddot{u}$  nicht einheitsfrei. Seine Größe und Einheit wird durch die Eigenschaften der physikalischen Kopplungsstruktur gegeben.

### 3.5. Isomorphie zwischen Netzwerken

Das abstrakte lineare Netzwerk beschreibt die allgemeinen Zusammenhänge, jedoch kann leicht die Isomorphie zwischen elektrischen, mechanischen und akustischen Teilsystemen gezeigt werden. Die Übersicht dazu ist in der Tabelle 3.1 wiedergegeben. Die hochgestellten Indizes  $E$ ,  $M$  und  $A$  bedeuten bei der Beschreibung der einzelnen Bauelemente die Zugehörigkeit zu elektrischem, mechanischem und akustischem Teilsystem.

Das elektrische Teilsystem beinhaltet als Differenzkoordinate die Spannung  $\underline{u}$  und als Flusskoordinate den Strom  $\underline{i}$  und als Bauelemente den elektrischen Widerstand  $R^E$ , die elektrische Kapazität  $C^E$  und die elektrische Induktivität  $L^E$ . Diese hängen wie folgt zusammen:

$$\underline{u} = j\omega L^E \underline{i}, \quad \underline{u} = \frac{1}{j\omega C^E} \underline{i}, \quad \underline{u} = R^E \underline{i}. \quad (3.5)$$

Dabei beschreiben die Bauelemente  $L^E$  und  $C^E$  das Speicherverhalten in elektrischer Teilstruktur und das Bauelement  $R^E$  den irreversiblen Energieverlust durch die Umwandlung elektrischer Energie in thermische Energie.

Für das Übersetzungsverhältnis gilt demnach

$$X = \ddot{u} = \frac{u_1 \dot{i}_1}{u_2 \dot{i}_2} \quad (3.6)$$

mit transformatorischer Beziehung, wie in der Abbildung 3.8 gezeigt.

Netzwerke		Elektrisches		Mechanisches		Akustisches	
Koordinaten	$\underline{\mu}$	Spannung	$\underline{u}$	Geschwindigkeit	$\underline{v}$	Druck	$\underline{p}$
	$\underline{\lambda}$	Strom	$\underline{i}$	Kraft	$\underline{F}$	Volumenfluß	$\underline{q}$
Bauelemente	$\alpha$	Induktivität	$L^E$	Nachgiebigkeit	$L^M$	Masse	$L^A$
	$\beta$	Kapazität	$C^E$	Masse	$C^M$	Nachgiebigkeit	$C^A$
	$\gamma$	Widerstand	$R^E$	Reibungsadmittanz	$R^M$	Reibung	$R^A$

**Tabelle 3.1.:** Analogien zwischen elektrischen, mechanischen und akustischen Koordinaten und Bauelementen. Die hochgestellten Indizes zeigen die Zugehörigkeit zu einzelnen Netzwerken.

Das mechanische Teilsystem besitzt als Differenzkoordinate die Kraft  $\underline{F}$  und als Flusskoordinate die Geschwindigkeit  $\underline{v}$  und als Bauelemente die mechanische Nachgiebigkeit  $R^M$ , die mechanische Reibungsadmittanz  $L^M$ , die als Kehrwert der Reibung definiert ist, und die Masse  $C^M$ , die, ähnlich den elektrischen Bauelementen, wie folgt zusammenhängen:

$$\underline{v} = j\omega L^M \underline{F}, \quad \underline{v} = \frac{1}{j\omega C^M} \underline{F}, \quad \underline{v} = R^M \underline{F}. \quad (3.7)$$

Die Netzwerke können durch die Transformatoren mit dem Übersetzungsverhältnis

$$X = \ddot{u} = \frac{v_1 \underline{F}_1}{v_2 \underline{F}_2} \quad (3.8)$$

miteinander verbunden werden.

Das akustische Netzwerk besitzt ähnlich zu den anderen Netzwerken den Druck  $\underline{p}$  als Differenzkoordinate und den Volumenfluss  $\underline{q}$  als Flusskoordinate und die Masse  $R^A$ , die



akustische Nachgiebigkeit  $C^A$  und die akustische Reibung  $L^A$  als Bauelemente:

$$\underline{p} = j\omega L^A \underline{q}, \quad \underline{p} = \frac{1}{j\omega C^A} \underline{q}, \quad \underline{p} = R^A \underline{q}. \quad (3.9)$$

Das transformatorische Übersetzungsverhältnis ist dabei durch

$$X = \ddot{u} = \frac{\underline{p}_1 \underline{q}_1}{\underline{p}_2 \underline{q}_2} \quad (3.10)$$

gegeben.

Die hier definierten Bauelemente stehen mit Eigenschaften der physikalischen Elemente in direkter Verbindung und werden für jedes konkrete physikalische Element aus dem Zusammenhang physikalischer Größen abgeleitet.

### 3.6. Schlußfolgerungen

In diesem Kapitel wurde die allgemeine Struktur der Netzwerktheorie, die in einer direkten Verbindung mit einer physikalischen Struktur steht, vorgestellt. Eine physikalische Struktur kann in mehrere Teilstrukturen aufgeteilt werden, die durch Kopplungsstrukturen miteinander verbunden werden. Die Teilstrukturen setzen sich aus physikalischen Elementen zusammen, die im Netzwerkmodell durch Netzwerke abgebildet werden. Die Netzwerke einzelner Teilsysteme weisen eine Isomorphie auf, so dass ein abstraktes lineares Netzwerk definiert werden kann. Die Zusammenhänge in diesem Netzwerk sind auf elektrische, mechanische und akustische Netzwerke übertragbar, so dass diese einheitlich in dem Netzwerkmodell abgebildet werden können. Die Eigenschaften einzelner Netzwerke sind durch Zusammenschalten einzelner Bauelemente gegeben, die in einer Verbindung mit Eigenschaften physikalischer Elemente stehen.

Die Verknüpfung zwischen physikalischer Struktur und Modell geht dabei über die Verknüpfung der Bauelemente mit Eigenschaften physikalischer Elemente. Um die realen physikalischen Elemente in Netzwerken abzubilden, sollen also seine Eigenschaften in Verbindung mit Bauelementen gebracht werden. Dabei können die Analogien zwischen Zusammenhang physikalischer Kräfte in realen physikalischen Elementen und dem entsprechenden Netzwerk genutzt werden. Diese Analogien führen dazu, dass die Bauelemente im Modell mit den Eigenschaften konkreter physikalischer Elemente verknüpft werden und somit eine realitätsnahe Modellabbildung entsteht.

In den nächsten Kapiteln 4 und 5 werden die in Piezo-Inkjetsystemen vorkommenden physikalische Elemente in der Netzwerktheorie mit konzentrierten und verteilten Parametern abgebildet. Dabei werden Piezo-Inkjetsysteme in drei Teilstrukturen - elektrische, mechanische und akustische - eingeteilt. Für jede dieser Teilstrukturen typische physikalische Elemente werden anschließend in Modellabbildungen in der Netzwerktheorie wiedergegeben. Dabei werden die Modellabbildungen bekannter und bereits beschriebener physikalischer Elemente aus der Netzwerktheorie übernommen und für einige speziell in Piezo-Inkjetsystemen vorkommende physikalische Elemente neu hergeleitet. Diese Darstellungen können anschließend zu der Modellierung mehrerer Piezo-Inkjetsysteme mit der Netzwerktheorie genutzt werden.

---

## 4. Modellierung mit konzentrierten Parametern

Die Piezo-Inkjetsysteme beinhalten elektrische, mechanische und akustische physikalische Elemente, die in der Netzwerktheorie durch Netzwerke abgebildet werden. Die Darstellung der Netzwerke kann dabei durch Vierpole vorgenommen werden, in denen die einzelnen Bauelemente zusammengeschaltet sind. Eine Darstellung der Netzwerke als Vierpole erlaubt eine Charakterisierung mit Kettenmatrizen, die eine einfache Darstellung des dynamischen Verhaltens von Netzwerken erlaubt.

In diesem Kapitel werden zuerst die physikalischen Elemente der Piezo-Inkjetsysteme den Teilsystemen zugeteilt und anschließend durch die Netzwerke beschrieben. Die Beschreibung erfolgt in der Vierpolform und das Verhalten der Vierpole wird in Kettenmatrixform gegeben. Durch die Analogien in den Netzwerken und physikalischen Elementen werden die Bauelemente der Netzwerke in einen Zusammenhang mit den Eigenschaften der physikalischen Elemente gebracht. Anschließend wird die Kopplung der Netzwerke durch Transformatoren und Gyratoren näher beschrieben.

### 4.1. Physikalische Elemente der Piezo-Inkjetsysteme

Bei der Beschreibung der Piezo-Inkjetsystemen mit Netzwerktheorie wird in dieser Arbeit ein Düsenkanal als physikalische Struktur gesehen. Diese Beschränkung basiert darauf, dass die wesentlichen Vorgänge in einem Piezo-Inkjetsystem durch den Aufbau eines Düsenkanals gegeben sind. Da die Düsenkanäle auch getrennt angesteuert werden, kann ein Düsenkanal als abgeschlossene physikalische Struktur betrachtet werden.

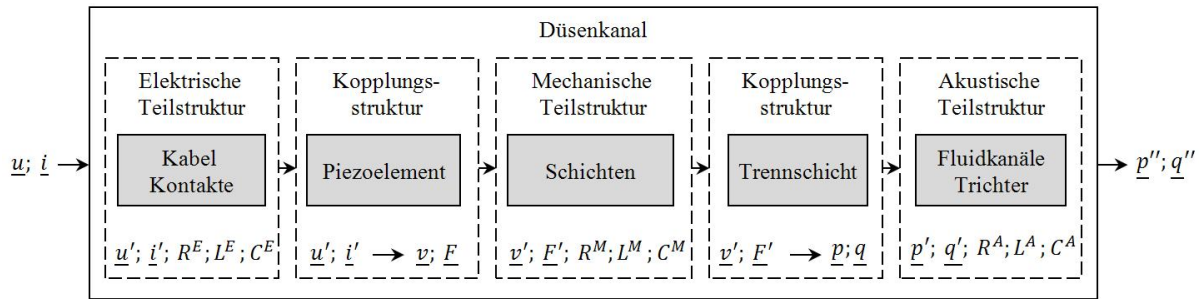
Eine Erweiterung des Modells auf die gesamte Düsenplatte mit mehreren Düsenkanälen ist durch Zusammenfassung mehrerer gleicher Modellabbildungen der Düsenkanäle auch möglich. In dieser Arbeit wird jedoch auf Darstellung solcher Systeme verzichtet und zuerst nur ein Düsenkanal modelliert.

Wird nun ein Düsenkanal eines Inkjetsystems betrachtet, so können seine physikalischen Elemente in drei Teil- und zwei Kopplungsstrukturen untergeteilt werden. Diese Unterteilung ist in der Abbildung 4.1 gezeigt.

Hier sind die einzelnen physikalischen Elemente eines Düsenkanals in Piezo-Inkjetsystemen elektrischer, mechanischer und akustischer Teilstruktur zugeordnet. Der elektrischen Teilstruktur sind Kabel und Kontaktflächen, die meistens aufgedampft sind, zugeordnet. Diese Zuteilung basiert auf den für die gesamte Struktur wesentlichen Eigenschaften der Kabel und Kontakte, die einen Einfluss auf die elektrische Spannung  $\underline{u}$  und den Strom  $\underline{i}$  haben.

Der nachfolgenden Kopplungsstruktur ist das Piezoelement zugeordnet. Dieses führt die elektrischen Koordinaten Spannung  $\underline{u}$  und Strom  $\underline{i}$  in die mechanischen Koordinaten Kraft  $\underline{F}$  und Geschwindigkeit  $\underline{v}$  um. Die Anordnung zu einer Kopplungsstruktur ist an dieser Stelle durch die Eigenschaften des Piezoelements gegeben, das durch Anlegen einer Spannung  $\underline{u}$  mit einem Strom  $\underline{i}$  sich mit einer Geschwindigkeit  $\underline{v}$  verformt und eine mechanische Kraft  $\underline{F}$  auf nachfolgende mechanische Schichten ausführt.

Die mechanische Teilstruktur ist durch die Schichten gegeben, die sowohl Silizium- als auch Klebeschichten sein können. Die mechanischen Schichten leiten durch ihre Verformung die Kraft  $\underline{F}$  mit einer Geschwindigkeit  $\underline{v}$  weiter.



**Abbildung 4.1.:** Zuordnung physikalischer Elemente eines Düsenkanals in einem Piezo-Inkjetsystem den elektrischen, mechanischen und akustischen Teilstrukturen und Kopplungsstrukturen. Unten sind die zu jeder Teilstruktur im Modell zugeordneten Koordinaten und Bauelemente gezeigt.

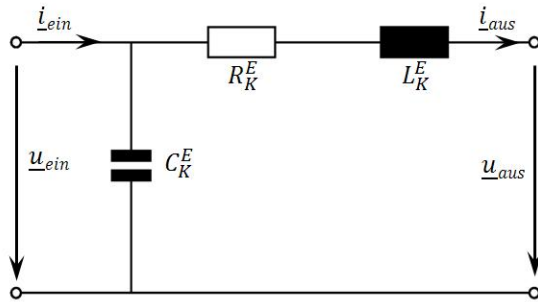
Durch eine Trennschicht zwischen mechanischer Teilstruktur und akustischer Teilstruktur werden die mechanischen Koordinaten  $\underline{F}$  und  $\underline{v}$  in die akustischen Koordinaten Druck  $\underline{p}$  und Volumenfluss  $\underline{q}$  überführt. Die Zuordnung der Trennschicht zu einer Kopplungsstruktur ist dadurch gerechtfertigt, dass durch mechanische Verformung der Trennschicht durch mechanische Kraft  $\underline{F}$  ein Druck in der akustischen Teilstruktur entsteht, der das Fluid in Fluidkanälen in Bewegung setzt. Die Geschwindigkeit  $\underline{v}$  bestimmt dabei den Volumenfluss  $\underline{q}$ .

Die letzte Teilstruktur ist akustisch. Dieser Teilstruktur werden Fluidkanäle und Trichter zugeordnet. Da die Düse selbst ein Fluidkanal ist, wird sie an dieser Stelle nicht speziell aufgeführt.

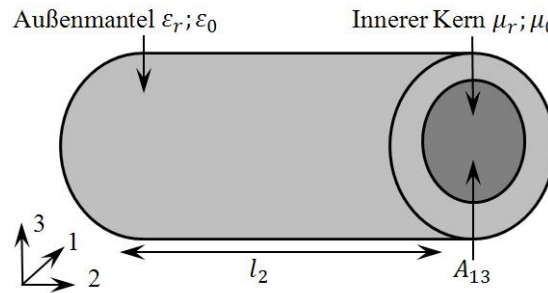
Der Düsenkanal wird von einer externen Quelle mit Spannung  $\underline{u}$  und Strom  $\underline{i}$  versorgt und liefert am Ausgang einen Druck  $\underline{p}$  und einen Volumenfluss  $\underline{q}$ , die die Tropfenbildung bestimmen..

## 4.2. Elektrische Teilstruktur

Die elektrische Teilstruktur eines Düsenkanals beinhaltet Kabel und Kontakte, die von der externen Quelle zum Piezoelement führen. Das Netzwerk beschreibt parasitäre Kapazitäten, Widerstände und Induktivitäten, die die Eingangsparameter  $\underline{u}$  und  $\underline{i}$  beeinflussen und verändern. Eine Modellabbildung der Kabel liegt in der Netzwerktheorie nicht vor und wird an dieser Stelle aus allgemeinen Zusammenhängen [137] abgeleitet.



**Abbildung 4.2.:** Modellabbildung elektrischer Kabel und elektrischer Kontakte als ein Netzwerk in Vierpoldarstellung.



**Abbildung 4.3.:** Geometrie und Aufbau eines runden Kabels mit Eigenschaften des Außenmantels und inneren Kerns.

Um eine genauere Modellabbildung der Kabel aufzuzeigen und die unerwünschten Effekte zu berücksichtigen, werden diese gemäß der Abbildung 4.2 als ein Vierpol dargestellt. Die Bauelemente  $L_K^E$  und  $C_K^E$  beschreiben das Speicherverhalten und das Bauelement  $R_K^E$  den irreversiblen Verlust der elektrischen Energie durch Wärmeentwicklung in den Kabeln und Kontakten.

Das Übertragungsverhalten des Netzwerks kann durch Längs- und Querkettenmatrizen [138] wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_{aus} \\ \underline{i}_{aus} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & j\omega L_K^E \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_K^E \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_K^E & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_{ein} \\ \underline{i}_{ein} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Die Bauelemente  $C_K^E$ ,  $L_K^E$  und  $R_K^E$  werden durch die Eigenschaften der Kabel und Kontakte

festgelegt. Für Kabel können diese durch [139]:

$$C_{Kab}^E = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A_{13}}{d}, \quad L_{Kab}^E = \mu_r \mu_0 \frac{l_2}{8\pi}, \quad R_{Kab}^E = 2\rho_0 \frac{l_2}{A_{13}} \quad (4.2)$$

bestimmt werden. Dabei bezeichnen am Beispiel eines runden Kabels in der Abbildung 4.3  $A_{13}$  die Fläche des leitenden Kerns,  $l_2$  die Länge des Kabels und  $d$  die Dicke des isolierenden Außenmantels. Die Eigenschaften des leitenden Kerns sind durch die magnetische Feldkonstante  $\mu_0$  und die Permeabilitätszahl  $\mu_r$  und die Eigenschaften des Außenmantels durch die elektrische Feldkonstante  $\epsilon_0$  und die Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$  gegeben.

Werden mehrere in ihrer Ausführung abweichende Kabel beim experimentellen Aufbau verwendet, so werden  $L_{Kab}^E$ ,  $C_{Kab}^E$  und  $R_{Kab}^E$  als Summe aller  $L_n^E$ ,  $C_n^E$  und  $R_n^E$  der Kabel abgebildet.

Die aufgedampften Kontakte tragen zu dem Gesamtwiderstand  $R_K^E$  im Netzwerk durch Kontaktwiderstand  $R_{Kon}^E$  bei. Dieser kann für physikalische Elemente, deren Fläche komplett mit dem Kontakt bedeckt ist, durch

$$R_{Kon}^E = \frac{l_2}{\rho} \quad (4.3)$$

angenähert werden [139]. Dabei bezeichnet  $\rho$  den spezifischen Widerstand des Kontaktmaterials. Somit sind dann die Bauelemente aus der Abbildung 4.2 durch

$$C_K^E = C_{Kab}^E, \quad L_K^E = L_{Kab}^E, \quad R_K^E = R_{Kab}^E + R_{Kon}^E \quad (4.4)$$

gegeben.

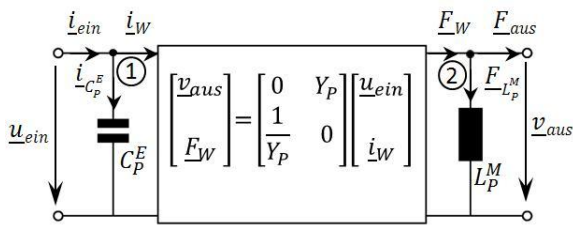
### 4.3. Elektro-mechanische Kopplungsstruktur

Die Modellabbildung elektro-mechanischer Kopplungsstrukturen ist in der Netzwerktheorie bereits bekannt [121][131][133]. An dieser Stelle wird eine allgemeine Form dieser Modellabbildung aus bekannter Darstellung abgeleitet, die auf Piezoelemente unterschiedlicher Formen übertragbar ist, und eine Beschreibung des Netzwerkes in der Kettenmatrixform aus der Systemtheorie abgeleitet [138].

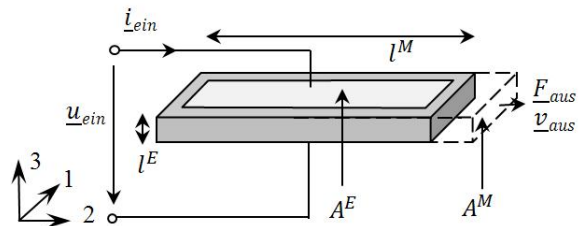
Die durch Kabel und Kontakte gegebene elektrische Teilstruktur ist durch das Piezoelement mit der mechanischen Teilstruktur verknüpft, siehe dazu die Abbildung 4.1 auf der Seite 28. Wie bereits erläutert, besteht die mechanische Teilstruktur aus Schichten zwischen Piezoelement und Fluidkanälen. Das Piezoelement führt die elektrischen Koordinaten  $\underline{u}$  und  $\underline{i}$  in die mechanischen Koordinaten  $\underline{v}$  und  $\underline{F}$  über.

Das Piezoelement kann als ein Gyrator wie in der Abbildung 3.9 auf der Seite 23 mit den zusätzlichen Bauelementen  $L_P^M$  und  $C_P^E$  beschrieben werden. Das Bauelement  $L_P^M$  beschreibt hier die mechanische Nachgiebigkeit und das Bauelement  $C_P^E$  die elektrische Kapazität des physikalischen Elements.

Die Abbildung 4.4 zeigt die Vierpoldarstellung des Netzwerkes, das die elektro-mechanische Kopplungsstruktur im Modell abbildet. Das Bauelement  $L_P^M$  befindet sich hier auf der mechanischen Seite des Gyrators und das elektrische Bauelement  $C_P^E$  auf der elektrischen Seite. Der Gyrator selbst verknüpft zwei Koordinatenpaare  $\underline{u}$ ,  $\underline{i}$  und  $\underline{v}$ ,  $\underline{F}$  durch die gyratorische Konstante  $Y_P$ .



**Abbildung 4.4.:** Modellabbildung des Piezoelementes als ein Netzwerk in Vierpoldarstellung. Mit 1 und 2 sind die Knotenpunkte gekennzeichnet.



**Abbildung 4.5.:** Geometrie eines freien Langschwingers mit Parametern  $A^M$ ,  $l^M$ ,  $A^E$  und  $l^E$  und Wirkung der Kräfte nach dem Anlegen einer Spannung.

Das Übertragungsverhalten des Vierpols kann durch Kettenmatrizen wie folgt:

$$\begin{bmatrix} v_{aus} \\ F_{aus} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{j\omega L_P^M} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Y_P \\ \frac{1}{Y_P} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_P^E & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ein} \\ i_{ein} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

beschrieben werden.

Der Zusammenhang zwischen den Bauelementen  $L_P^M$  und  $C_P^E$  und der Geometrie, dem Wirkungsprinzip und den physikalischen Eigenschaften des Piezoelementes wird von Zustandsgleichungen für die elektrische Verschiebungsdichte  $D$  und die mechanische Span-

nung  $T$  abgeleitet. Diese lauten [140]:

$$D = \epsilon^S E + e S, \quad T = -e E + c^E S. \quad (4.6)$$

Dabei bezeichnen  $S$  die mechanische Spannung,  $E$  die elektrische Feldstärke,  $\epsilon^S$  die Permittivität für  $S = 0$ ,  $e$  die piezoelektrische Kraftkonstante und  $c^E$  den elastischen Koeffizient für  $E = 0$ . Die drei Koeffizienten  $\epsilon^S$ ,  $e$  und  $c^E$  sind von der Richtung der wirkenden Kraft abhängig und sind von der Ausführung und Wirkungsprinzip des Piezoelementes abhängig.

Die elastische Verschiebungsdichte  $D$ , die mechanische Spannung  $T$ , die elektrische Feldstärke  $E$  und die mechanische Dehnung  $S$  sind wie folgt definiert [121][140]:

$$D = \frac{Q}{A^E}, \quad T = \frac{F}{A^M}, \quad E = \frac{u}{l^E}, \quad S = \frac{\xi}{l^M}. \quad (4.7)$$

Der Parameter  $\xi$  beschreibt hier die Auslenkung des Piezoelementes, die Parameter  $A^M$  und  $l^M$  geben die Abmessungen der mechanisch wirksamen Fläche und Länge und die Parameter  $A^E$  und  $l^E$  der elektrisch wirksamen Fläche und Länge im Piezoelement wieder. Die mechanisch wirksame Fläche ist dabei die Ebene, zu der der Vektor der Kraft  $\underline{F}$  normal ist, gegeben und die elektrisch wirksame Fläche  $A^E$  ist die Fläche des Kontaktes. Die elektrisch wirksame Länge  $l^E$  ist durch den Abstand der Kontakte voneinander und die mechanisch wirksame Länge  $l^M$  durch die Länge des Piezoelementes in die Richtung der Kraft, in die mechanische Verformung stattfindet, gegeben.

Diese Parameter sind für einen freien Längsschwinger in der Abbildung 4.5 gezeigt. Die Kraft der Verformung wirkt hier in die Richtung der Achse 2 und somit liegt die mechanisch wirksame Fläche in der Achsenebene 1-3. Der Längsschwinger verformt sich in Richtung der Achse 2, so dass die mechanisch wirksame Länge  $l^M$  der Länge  $l_2$  entspricht. Die elektrisch wirksame Fläche ist hier die Fläche des Kontaktes in der Achsenebene 1-2 und die elektrisch wirksame Länge  $l^E$  entspricht dem Abstand der Kontakte voneinander und ist gleich  $l_3$ . Die Parameter  $A^M$ ,  $l^M$ ,  $A^E$ ,  $l^E$  variieren je nach Wirkungsprinzip und Ausführung des Piezoelementes und können leicht abgeleitet werden.

Nach dem Einsetzen der Gleichungen 4.7 in die Gleichungen 4.6 folgt:

$$\frac{Q}{A^E} = \epsilon^S \frac{u}{l^E} + e \frac{\xi}{l^M}, \quad \frac{F}{A^M} = -e \frac{u}{l^E} + c^E \frac{\xi}{l^M}. \quad (4.8)$$



Für die elektrische Ladung  $Q$  und die mechanische Kraft  $F$  gilt demnach:

$$Q = \varepsilon^S \frac{A^E}{l^E} u + e \frac{A^E}{l^M} \xi, \quad F = -e \frac{A^M}{l^E} u + c^E \frac{A^M}{l^M} \xi. \quad (4.9)$$

Aus der Überführung in komplexe Schreibweise [121] folgt:

$$\underline{Q} \rightarrow \underline{\underline{Q}} = \frac{1}{j\omega} \underline{\underline{i}}_{ein}, \quad \underline{F} \rightarrow \underline{\underline{F}}_{aus}, \quad \underline{u} \rightarrow \underline{\underline{u}}_{ein}, \quad \underline{\xi} \rightarrow \underline{\underline{\xi}} = \frac{1}{j\omega} \underline{\underline{v}}_{aus}. \quad (4.10)$$

Und das anschließende Umformen führt dann zu den Gleichungen:

$$\underline{\underline{i}}_{ein} = j\omega \varepsilon^S \frac{A^E}{l^E} \underline{\underline{u}}_{ein} + e \frac{A^E}{l^M} \underline{\underline{v}}_{aus}, \quad \underline{\underline{F}}_{aus} = -e \frac{A^M}{l^E} \underline{\underline{u}}_{ein} + \frac{1}{j\omega} c^E \frac{A^M}{l^M} \underline{\underline{v}}_{aus}. \quad (4.11)$$

Wird nun das Netzwerk in der Abbildung 4.4 betrachtet, so gelten im Knotenpunkt 1 für die Ströme  $\underline{\underline{i}}_{ein}$ ,  $\underline{\underline{i}}_W$  und  $\underline{\underline{i}}_{C_P^E}$  und im Knotenpunkt 2 für die mechanischen Kräfte  $\underline{\underline{F}}_{aus}$ ,  $\underline{\underline{F}}_W$  sowie  $\underline{\underline{F}}_{L_P^M}$  folgende Gleichungen:

$$\underline{\underline{i}}_{ein} = \underline{\underline{i}}_{C_P^E} + \underline{\underline{i}}_W, \quad \underline{\underline{F}}_W = \underline{\underline{F}}_{aus} + \underline{\underline{F}}_{L_P^M}. \quad (4.12)$$

Wird nun der Strom  $\underline{\underline{i}}_{C_P^E}$  am Bauelement  $C_P^E$  und die mechanische Kraft  $\underline{\underline{F}}_{L_P^M}$  am bauelement  $L_P^M$  betrachtet, so gilt für diese beiden Größen:

$$\underline{\underline{i}}_{C_P^E} = j\omega C_P^E \underline{\underline{u}}_{ein}, \quad \underline{\underline{F}}_{L_P^M} = \frac{1}{j\omega} \frac{1}{L_P^M} \underline{\underline{v}}_{aus}. \quad (4.13)$$

Der Zusammenhang zwischen den Größen  $\underline{\underline{i}}_W$  und  $\underline{\underline{v}}_{aus}$ , sowie  $\underline{\underline{F}}_W$  und  $\underline{\underline{u}}_{ein}$  kann durch die Gyratorgleichungen

$$\underline{\underline{i}}_W = \frac{1}{Y_P} \underline{\underline{v}}_{aus}, \quad \underline{\underline{F}}_W = \frac{1}{Y_P} \underline{\underline{u}}_{ein} \quad (4.14)$$

bestimmt werden. Somit nehmen die Gleichungen 4.12 durch Einsetzen der Gleichun-

gen 4.13 und 4.14 folgende Form an:

$$\underline{i}_{ein} = j\omega C_P^E \underline{u}_{ein} + \frac{1}{Y_P} \underline{v}_{aus}, \quad \underline{F}_{aus} = \frac{1}{Y_P} \underline{u}_{ein} - \frac{1}{j\omega L_P^M} \underline{v}_{aus}. \quad (4.15)$$

Werden die Gleichungen 4.11 und 4.15 verglichen, so können die Werte  $Y_P$ ,  $C_P^E$  und  $L_P^M$  und direkt ablesen werden:

$$\frac{1}{Y_P} = e \frac{A^E}{l^M} = -e \frac{l^E}{A^M}, \quad C_P^E = \epsilon^S \frac{A^E}{l^E}, \quad L_P^M = -\frac{1}{c^E} \frac{l^M}{A^M}. \quad (4.16)$$

Sind geometrische Abmessungen  $A^E$ ,  $A^M$ ,  $l^M$  und  $l^E$  sowie Eigenschaften des Piezoelementes  $e$ ,  $\epsilon^S$ ,  $c^E$  bekannt, können die Bauelemente  $Y_P$ ,  $C_P^E$  und  $L_P^M$  und berechnet werden.

#### 4.4. Mechanische Teilstruktur

Die mechanische Teilstruktur ist in dem Düsenkanal durch die Schichten gegeben, siehe dazu die Abbildung 4.1 auf der Seite 28. Diese sind in den meisten Fällen durch Kleber, aufgedampfte Kontakte und Siliziumschichten gegeben. Die Darstellung der mechanischen Schichten in der Netzwerktheorie ist bereits bekannt und wird an dieser Stelle übernommen [131][121].

Die zusätzlichen mechanischen Schichten zwischen dem Piezoelement und dem Fluid in Fluidkanälen führen zur Schwächung des Piezoeffekts sowie zur Abnahme der vom Piezoelement ausgeübten Kraft. Zum einen liegt das an der Masse, die zusätzlich bewegt werden muss und zum anderen an der mechanischen Nachgiebigkeit der Schichten und Reibung. Da die Schichten an anderen physikalischen Elementen befestigt sind, ist die Reibung zwischen den einzelnen Schichten unendlich groß und somit die Reibungsadmittanz vernachlässigbar klein.

Die mechanischen Schichten spielen in der mechanischen Teilstruktur die selbe Rolle, wie die Kabel und Kontakte in der elektrischen Teilstruktur. Das Netzwerk kann in Vierpoldarstellung so wie in der Abbildung 4.6 dargestellt werden. Das Bauelement  $L_{ZS}^M$  bildet die mechanische Nachgiebigkeit  $n$  und das Bauelement  $C_{ZS}^M$  die mechanische Masse  $m$  der Schicht ab.

Das Übertragungsverhalten des Netzwerks in der Abbildung 4.6 kann durch die Ketten-

matrizen

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_{aus} \\ \underline{F}_{aus} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_{ZS}^M & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j\omega L_{ZS}^M \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_{ein} \\ \underline{F}_{ein} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

beschrieben werden. Die Bauelemente  $C_{ZS}^M$  und  $L_{ZS}^M$  können wie folgt bestimmt werden:

$$C_{ZS}^M = n = \frac{4l_2^3}{EA_{13}}, \quad L_{ZS}^M = m = \rho_0 l_2 A_{13}. \quad (4.18)$$

Das Bauelement  $C_{ZS}^M$  wird dabei durch das Elastizitätsmodul  $E$  und die geometrischen Abmessungen der Schicht gegeben, die in der Abbildung 4.7 dargestellt sind. Das Bauelement  $L_{ZS}^M$  ist wie bereits bekannt durch die Masse der Schicht gegeben und ist durch die Geometrie und die Dichte des Materials  $\rho_0$  bestimmt.

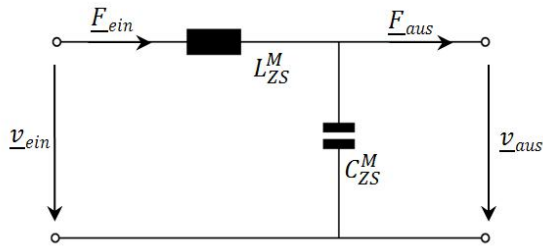


Abbildung 4.6.: Modellabbildung einer mechanischen Schicht als ein Netzwerk in Vierpoldarstellung.

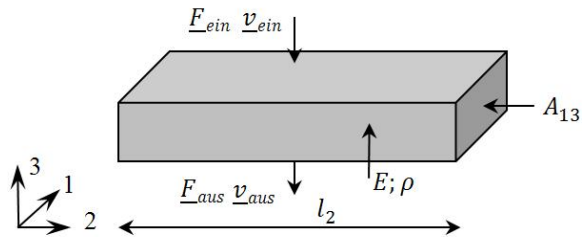


Abbildung 4.7.: Geometrie und Aufbau einer Schicht mit zugehörigen Eigenschaften des Materials.

Sind im Aufbau des Düsenkanals mehrere mechanische Schichten vorhanden, so werden diese durch mehrere Netzwerke abgebildet, die in Reihe geschaltet sind. Die Bauelemente  $C_{ZS}^M$  und  $L_{ZS}^M$  werden für jede der Schichten neu berechnet.

## 4.5. Mechanisch-akustische Kopplungsstruktur

Die Beschreibung mechanisch-akustischer Kopplungsstrukturen wurde bereits in der Netzwerktheorie durchgeführt und wird an dieser Stelle übernommen [121][131]. Um mechanische Koordinaten  $\underline{v}$  und  $\underline{F}$  in akustische Koordinaten  $\underline{p}$  und  $\underline{q}$  zu überführen, kann eine der letzten Schichten der mechanischen Teilstruktur als eine Trennschicht und somit als eine mechanisch-akustische Kopplungsstruktur definiert und analog dem Piezoelement beschrieben werden, siehe dazu die Abbildung 4.1 auf der Seite 28.

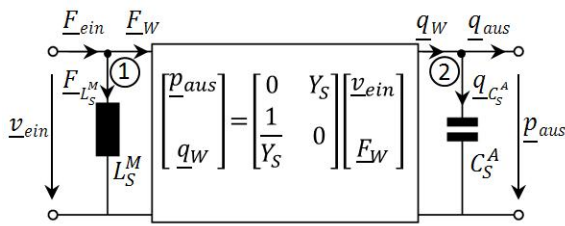
Das Netzwerk wird durch einen Gyrator mit zusätzlichen Bauelementen  $L_S^M$  und  $C_S^A$  abgebildet, wie Abbildung 4.8 zeigt.

Der Gyrator führt die mechanischen Koordinaten  $\underline{v}$  und  $\underline{F}$  in die akustischen Koordinaten  $\underline{p}$  und  $\underline{q}$  mit einer gyratorischen Konstanten  $Y_S$  über und das Bauelement  $L_S^M$  stellt hier die mechanische und das Bauelement  $C_S^A$  die akustische Nachgiebigkeit dar.

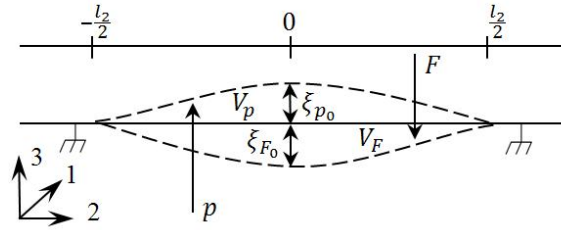
Das Übertragungsverhalten des Netzwerkes kann durch folgende Kettenmatrizen beschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{p}_{aus} \\ \underline{q}_{aus} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_S^A & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Y_S \\ \frac{1}{Y_S} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{j\omega L_S^M} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_{ein} \\ \underline{F}_{ein} \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Einzelne Bauelemente sind durch die Geometrie, die Anordnung zu anderen Schichten und den Fluidkanälen sowie den physikalischen Eigenschaften des Materials der Trennschicht gegeben.



**Abbildung 4.8.:** Modellabbildung der mechanisch-akustischer Koppelungsstruktur als ein Netzwerk in Vierpoldarstellung.



**Abbildung 4.9.:** Wirkung der Kräfte und Geometrie einer Trennschicht. Mit  $V_p$  und  $V_F$  ist das verdrängte Volumen gekennzeichnet.

Um die Eigenschaften der Bauelemente  $L_S^M$  und  $C_S^A$  zu bestimmen, wird, wie Abbildung 4.9 zeigt, die Wirkung der Kraft  $F_0$  und des Drucks  $p_0$  im Punkt  $x = 0$  auf die Schicht betrachtet. Für die Verschiebungen  $\xi_{F_0}$  und  $\xi_{p_0}$  gilt der Zusammenhang:

$$\xi_0 = \xi_{F_0} - \xi_{p_0}. \quad (4.20)$$

Die Verschiebungen  $\xi_{F_0}$  und  $\xi_{p_0}$  geben die maximale Durchbiegung bei Kraft- und Druckbelastung und können durch Funktionen  $f_p^1$  und  $f_F^1$  bestimmt werden:

$$\xi_{F_0} = f_F^1 F, \quad \xi_{p_0} = f_p^1 p. \quad (4.21)$$

Die Funktionen  $f_p^1$  und  $f_F^1$  werden durch die Geometrie des belasteten Materials, seine Eigenschaften und die Richtung der Kraft- und Druckwirkung bestimmt und können den Standardwerken der technischen Mechanik oder des Maschinenbaus entnommen werden [141][142].

Nach Einsetzen der Gleichungen 4.21 in Gleichung 4.20 und dem anschließenden Auflösen nach  $F$  folgt:

$$F = \frac{1}{f_F^1} \xi_0 + \frac{f_p^1}{f_F^1} p. \quad (4.22)$$

Weiterhin wird bei der Einwirkung der Kraft  $F$  auf eine Schicht das Volumen  $V_F$  verdrängt. Zusätzlich wirkt auf die Trennschicht ein Gegendruck, der das Volumen  $V_p$ , wie in Abbildung 4.9 gezeigt, verdrängt. Das verdrängte Gesamtvolumen  $V$  ist dann durch

$$V = V_F - V_p \quad (4.23)$$

gegeben. Die Volumina  $V_F$  und  $V_p$  ergeben sich aus dem Integral der Verschiebungen  $\xi_p$  und  $\xi_F$  über die Gesamtlänge  $l_2$  der Schicht:

$$V_F = \int_{-l_2/2}^{l_2/2} \xi_F dx, \quad V_p = \int_{-l_2/2}^{l_2/2} \xi_p dx. \quad (4.24)$$

Die ortsabhängigen Gleichungen der Biegelinie bei Kraft- und Druckbelastung  $\xi_p$  und  $\xi_F$  können ebenfalls für jeden konkreten Fall den Standardwerken entnommen werden [141][142]. Das Einsetzen der Gleichungen für  $V_F$  und  $V_p$  in 4.23 führt dann zu

$$V = f_F^2 F - f_p^2 p, \quad (4.25)$$

wobei  $f_F^2$  und  $f_p^2$  durch Integration der Verschiebung über die Länge des physikalischen Elements  $l_2$  gegeben sind:

$$f_F^2 = \frac{V_F}{F} = \frac{1}{F} \int_{-l_2/2}^{l_2/2} \xi_F dx, \quad f_p^2 = \frac{V_p}{p} = \frac{1}{p} \int_{-l_2/2}^{l_2/2} \xi_p dx. \quad (4.26)$$

Ersetzt man nun die Kraft  $F$  in der Gleichung 4.25 mit der Gleichung 4.22, so gilt für

das Volumen  $V$ :

$$V = \frac{f_F^2}{f_F^1} \xi_0 + \left( \frac{f_p^1 f_F^2}{f_F^1} - f_p^2 \right) p. \quad (4.27)$$

Die Gleichungen 4.22 und 4.27 können durch die Transformation der Größen  $\xi$ ,  $F$ ,  $p$  und  $V$  aus Zeitbereich in den Bildbereich:

$$\xi \rightarrow \underline{\xi} = \frac{1}{j\omega} v_{ein}, \quad F \rightarrow \underline{F}_{ein}, \quad p \rightarrow \underline{p}_{aus}, \quad V \rightarrow \underline{V} = \frac{1}{j\omega} q_{aus} \quad (4.28)$$

in die komplexe Schreibweise überführt und wie folgt umgeformt werden:

$$\underline{F}_{ein} = \frac{1}{j\omega} \frac{1}{f_F^1} v_{ein} + \frac{f_p^1}{f_F^1} \underline{p}_{aus}, \quad \underline{q}_{aus} = \frac{f_F^2}{f_F^1} v_{ein} + j\omega \left( \frac{f_p^1 f_F^2}{f_F^1} - f_p^2 \right) \underline{p}_{aus}. \quad (4.29)$$

Nun können die Zusammenhänge für Bauelemente  $C_S^A$  und  $L_S^M$  auf der elektrischen Seite dargestellt werden. Dazu betrachtet man die Flusskoordinaten  $\underline{F}$  und  $\underline{q}$  in den Knotenpunkten 1 und 2 aus der Abbildung 4.8. Hieraus resultiert:

$$\underline{F}_{ein} = \underline{F}_{L_S^M} + \underline{F}_W, \quad \underline{q}_{aus} = -\underline{q}_{C_S^A} + \underline{q}_W. \quad (4.30)$$

Für die auf das Bauelement  $L_S^M$  wirkende Kraft  $\underline{F}_{L_S^M}$  und für den Volumenfluss  $\underline{q}_{C_S^A}$  an dem Bauelement  $C_S^A$  gilt:

$$\underline{F}_{L_S^M} = \frac{1}{j\omega L_S^M} v_{ein}, \quad \underline{q}_{C_S^A} = j\omega C_S^A \underline{p}_{aus}. \quad (4.31)$$

Aus den Gyratorgleichungen folgt folgender Zusammenhang für den Druck  $\underline{p}_{aus}$  und den Volumenfluss  $\underline{q}_{aus}$ :

$$\underline{p}_{aus} = Y_S \underline{F}_W, \quad \underline{q}_W = \frac{1}{Y_S} \underline{p}_{aus}. \quad (4.32)$$

Das Einsetzen der beiden Gleichungen 4.32 in die Gleichung 4.30 führt schließlich zu:

$$\underline{E}_{ein} = \frac{1}{j\omega L_S^M} \underline{v}_{ein} + \frac{1}{Y_S} \underline{p}_{aus}, \quad \underline{q}_{aus} = -j\omega C_S^A \underline{p}_{aus} + \frac{1}{Y_S} \underline{v}_{ein}. \quad (4.33)$$

Durch direkten Vergleich mit der Gleichung 4.29 lassen sich die Werte für gyratorische Konstante  $Y_S$  und Bauelemente  $L_S^M$  und  $C_S^A$  ablesen:

$$Y_S = \frac{f_F^1}{f_F^2} = \frac{f_F^1}{f_p^1}, \quad L_S^M = f_F^1, \quad C_S^A = f_p^2 - \frac{f_p^1}{f_F^1} f_F^2. \quad (4.34)$$

Sind die Funktionen  $f_F^1$  und  $f_p^1$  sowie  $f_F^2$  und  $f_p^2$  sowohl bei Kraft- als auch bei Druckbelastung bekannt, so ist der Zusammenhang zwischen den Bauelementen und den Eigenschaften physikalisches Elementes bestimmbar.

## 4.6. Akustische Teilstruktur

Die weitere relevante Teilstruktur bei der Beschreibung des Düsenkanals ist die akustische Teilstruktur. Dazu zählen Fluidkanäle, in denen sich der Druck  $\underline{p}$  ausbreitet und ein Volumenfluss  $\underline{q}$  vorhanden ist, siehe dazu die Abbildung 4.1 auf der Seite 28. Der Druck und der Volumenfluss führen anschließend zur Bildung eines Tropfens, der sich in einem Luftkanal weiterbewegt, siehe dazu die Abbildungen 2.1 und 2.2 auf der Seite 4.

Im Gegensatz zu anderen physikalischen Elementen im Düsenkanal kann der Aufbau der Fluidkanäle sehr komplex sein, so dass mehrere Netzwerke nötig sind, um die gesamte akustische Teilstruktur darzustellen. Zwischen den einzelnen Netzwerken, die Fluidkanäle abbilden, werden hier Transformatoren geschaltet, um die Volumenerhaltung in allen Fluidkanälen zu erreichen.

In der Netzwerktheorie wird zwischen kanalartigen und volumenartigen Fluidkanälen unterschieden [121][131]. Es wird angenommen, dass in kanalartigen Fluidkanälen nur eine Fluidbewegung und keine Fluidkompression stattfindet. In volumenartigen Fluidkanälen dagegen wird das Fluid komprimiert und es findet keinerlei Bewegung statt. Die Modellabbildungen beider Arten der Kanäle sind bereits in der Netzwerktheorie bekannt und im folgenden werden beide Arten der Fluidkanäle sowie transformatorische Verknüpfungen dargestellt.

Bei der Beschreibung der beiden Arten von Fluidkanälen in der Netzwerktheorie mit

konzentrierten Parametern wird von einem unveränderlichen Querschnitt ausgegangen. In dem Aufbau der Düsenkanäle kommen jedoch solche Strukturen wie Trichter, die einen besseren Zulauf des Fluids zur Düse gewährleisten, vor. Die Abbildung eines solchen akustischen Aufbaus mit konzentrierten Parametern fehlt in der Netzwerktheorie und wird hier speziell für akustische kanalartige Trichter hergeleitet.

#### 4.6.1. Kanalartige Fluidkanäle

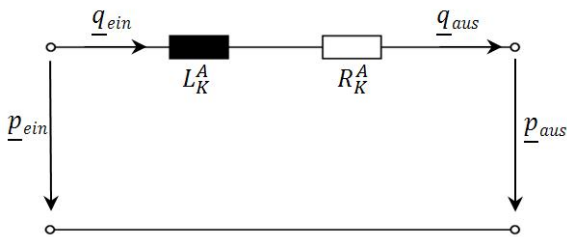
Betrachtet man einen kanalartigen Fluidkanal, in dem eine Bewegung und keine Kompression stattfindet, so kann dieser durch zwei Bauelemente dargestellt werden. Zum einen soll die Reibung des Fluids bei der Bewegung überwunden und zum anderen die Masse fortbewegt werden. In akustischen Teilstrukturen wird die Reibung des Fluids durch das Bauelement  $R_K^A$  und die akustische Masse des Fluids durch das Bauelement  $L_K^A$  abgebildet.

Die Abbildung 4.10 zeigt ein Netzwerk aus in Reihe geschalteten Bauelementen  $R_K^A$  und  $L_K^A$  in Vierpoldarstellung zur Beschreibung eines kanalartigen Fluidkanals.

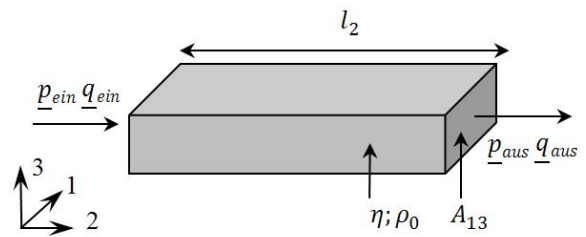
Das Übertragungsverhalten des Netzwerks kann durch folgende Kettenmatrizen beschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{p}_{aus} \\ \underline{q}_{aus} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_K^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j\omega L_K^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{p}_{ein} \\ \underline{q}_{ein} \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Für die Bestimmung der Bauelemente  $R_K^A$  und  $L_K^A$  sollen neben geometrischen Parametern auch die Reibung und die Kraft zur Bewegung der Masse berücksichtigt werden.



**Abbildung 4.10.:** Modellabbildung eines kanalartigen Fluidkanals durch ein Netzwerk in Vierpoldarstellung.



**Abbildung 4.11.:** Geometrie eines kanalartigen Fluidkanals mit der Viskosität des Fluids  $\eta$  und Dichte  $\rho_0$ .

Zur Bestimmung des Parameters  $R_K^A$  wird die Reibung während der Bewegung des Fluids im Fluidkanal betrachtet. Für den Volumenstrom  $dV/dt$  bei laminarer Strömung gilt das



lineare Gesetz von Hagen-Poiseuille [143][144]:

$$\frac{dV}{dt} = q = \frac{1}{B}p. \quad (4.36)$$

Die Proportionalitätskonstante  $B$  hängt von der Geometrie des Kanals ab und ist in erster Näherung [143]:

$$B = 12\eta \frac{l_2}{l_1 l_3^3} \quad (4.37)$$

für quadratische Querschnitte und [143]:

$$B = 8\eta \frac{l_2}{\pi r^4} \quad (4.38)$$

für runde Querschnitte. Die dazugehörige Geometrie für quadratische Querschnitte ist in der Abbildung 4.11 gezeigt. Hier sind  $\eta$  die Viskosität und  $\rho_0$  die Dichte des Fluids. Aus der in komplexe Schreibweise überführten Gleichung 4.36 mit [121]:

$$p \rightarrow \underline{p}, \quad q \rightarrow \underline{q} \quad (4.39)$$

resultiert für die akustischen Koordinaten  $\underline{p}$  und  $\underline{q}$  folgender Ausdruck:

$$\underline{p} = B\underline{q}. \quad (4.40)$$

Diese Gleichung entspricht einem akustischen Widerstand mit:

$$R_K^A = B. \quad (4.41)$$

Wird nun die Masse betrachtet, die bei der Bewegung des Fluids durch den Fluidkanal transportiert wird, so lässt sich die dafür benötigte Kraft wie folgt zusammenfassen:

$$F = (p_1 - p_2)A_{31} = pA_{31}. \quad (4.42)$$

In der komplexen Schreibweise mit:

$$\underline{p} \rightarrow \underline{p}, \quad F \rightarrow \underline{F} = j\omega \underline{v} = j\omega \frac{q}{A_{31}} \quad (4.43)$$

erhält man:

$$\underline{p}A_{31} = j\omega m \frac{q}{A_{31}}. \quad (4.44)$$

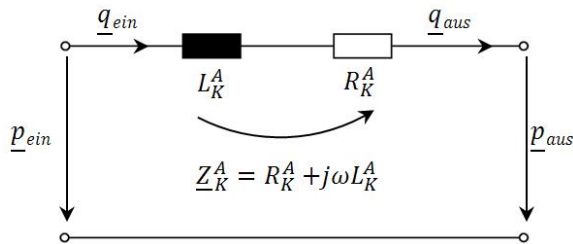
Setzt man nun für die Masse  $m$  den Ausdruck  $V\rho_0$  ein und formt nach  $\underline{p}$  um, so entsteht folgende Gleichung:

$$\underline{p} = j\omega \frac{l_2 \rho_0}{A_{31}} q. \quad (4.45)$$

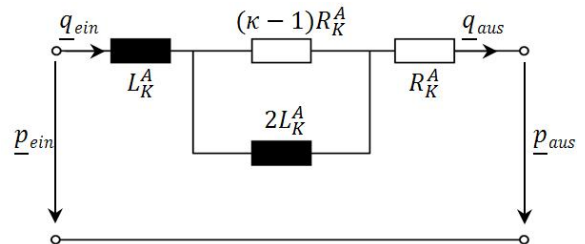
Das entspricht einer Induktivität mit dem Wert:

$$L_K^A = \frac{l_2 \rho_0}{A_{31}}. \quad (4.46)$$

Somit sind die Bauelemente  $R_K^A$  und  $L_K^A$  durch die Geometrie des kanalartigen Fluidkanals und die Eigenschaften des Fluids festgelegt.



**Abbildung 4.12.:** Vierpoldarstellung des akustischen Fluidkanals mit frequenzabhängigen Parametern.



**Abbildung 4.13.:** Vierpoldarstellung des akustischen Fluidkanals ohne frequenzabhängige Parameter.

Das Netzwerk entspricht einer komplexen Impedanz mit einem realen Anteil  $R_K^A$  und einem imaginären Anteil  $L_K^A$ , wie in der Abbildung 4.12 gezeigt ist. Unter der weiteren Annahme, dass die Frequenzen in physikalischer Struktur noch viel kleiner als die Grenzfrequenz  $\omega_g$  sind, gilt eine weitere Vereinfachung.

In diesem Fall kann die frequenzabhängige Darstellung des Fluidkanals durch ein frequenzunabhängiges Netzwerk, wie in der Abbildung 4.13 gezeigt, abgebildet werden. Dabei werden die Bauelemente aus dem Netzwerk in der Abbildung 4.12 übernommen und zusätzlich mit dem Adiabatenexponent  $\kappa$  multipliziert.

#### 4.6.2. Volumenartige Fluidkanäle

In einem volumenartigen Fluidkanal findet im Gegensatz zu einem kanalartigen Fluidkanal keine Bewegung, sondern nur Kompression statt. Ein solcher akustischer Fluidkanal kann durch das Bauelement  $C_K^A$ , der die akustische Nachgiebigkeit beschreibt, modelliert werden. Seine Eigenschaften werden ebenso wie bei allen anderen Bauelementen durch die Geometrie und die Eigenschaften des Fluids vorgegeben.

Für das Bauelement  $C_K^A$  gilt:

$$C_K^A = \frac{V_0}{p_0}. \quad (4.47)$$

Um einen Zusammenhang zwischen dem Bauelement und den Eigenschaften des Fluids zu finden, wird eine adiabatische Volumen- und Druckänderung angenommen. In diesem Fall gilt für den Druck  $p_0$  und das Volumen  $V_0$  folgender Zusammenhang [145]:

$$p_0 dV + V_0 dp = 0. \quad (4.48)$$

Nach der Umformung kommt folgender Ausdruck für das Bauelement  $C_K^A$  zusammen:

$$C_K^A = \frac{V_0}{p_0} = -\frac{dV}{dp}. \quad (4.49)$$

Führt man nun das Kompressionsmodul  $K$  mit der Definition nach [146] ein:

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V_0} \frac{dV}{dp}, \quad (4.50)$$

so resultiert nach der Umformung und dem Ersetzen des Volumens  $V_0$  mit den geometrischen Abmessungen des Fluidkanals  $l_2 A_{13}$  folgender Ausdruck:

$$C_K^A = \frac{V_0}{p_0} = \frac{1}{K} V_0 = \frac{1}{K} l_2 A_{13}. \quad (4.51)$$

Somit ist die Verbindung zwischen dem Bauelement  $C_K^A$  und physikalischen Eigenschaften des Fluids und den Abmessungen des volumenartigen Fluidkanals hergestellt.

### 4.6.3. Transformatorische Verknüpfung der Netzwerke

Da der Aufbau des Düsenkanals aus mehreren Fluidkanälen besteht, die einen ungleichen Querschnitt aufweisen, kann zusätzlich ein Transformator, wie in der Abbildung 4.14 gezeigt, definiert werden.

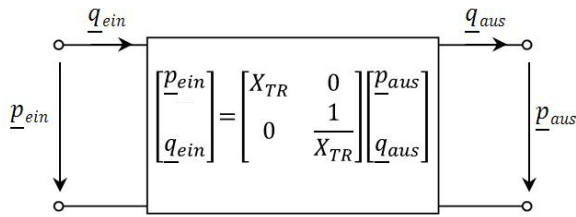


Abbildung 4.14.: Idealer akustischer Transformator in Vierpoldarstellung.

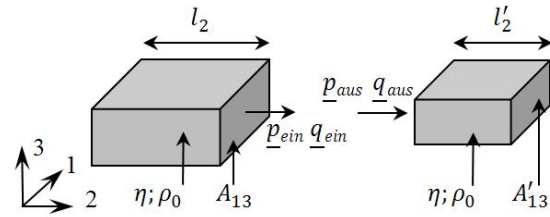


Abbildung 4.15.: Geometrie des Übergangs zwischen zwei Fluidkanälen.

Das Übertragungsverhalten eines Transformators ist dann durch die Konstante  $X_{TR}$  charakterisiert und kann demnach in Kettenmatrizen durch

$$\begin{bmatrix} p_{aus} \\ q_{aus} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{TR} & 0 \\ 0 & \frac{1}{X_{TR}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{ein} \\ q_{ein} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

beschrieben werden. Die dazugehörige Geometrie wird in der Abbildung 4.15 dargestellt.

Bei dem Übergang von einem Fluidkanal in den anderen Fluidkanal bleibt das pro Zeit um die infinitesimale Länge  $\delta l_2$  bewegte Volumen  $V$  konstant, so dass gilt:

$$q_{ein} = q_{aus} = \frac{V}{t} = \frac{V'}{t}, \quad \frac{q_{ein}}{q_{aus}} = \frac{V}{V'} = \frac{A_{13} \delta l_2}{A'_{13} \delta l_2} = \frac{A_{13}}{A'_{13}}. \quad (4.53)$$

An dieser Stelle kann die Konstante  $X_{TR}$  direkt abgelesen werden und beträgt

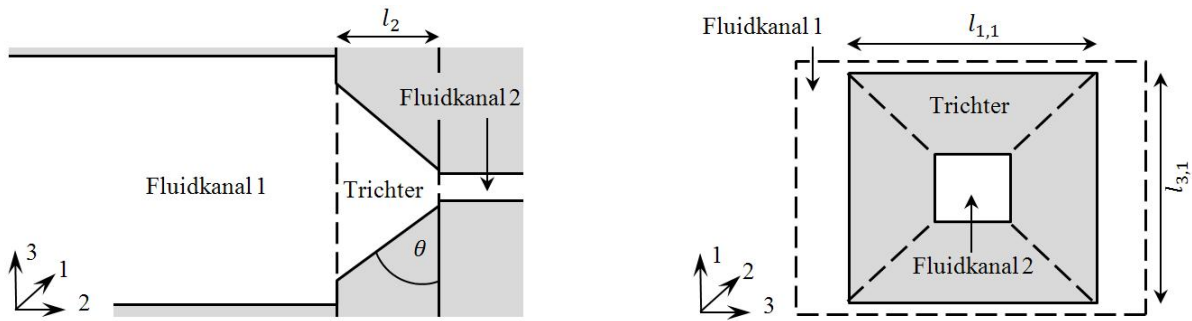
$$X_{TR} = \frac{A'_{31}}{A_{31}}. \quad (4.54)$$

Durch den Übergang in einen größeren oder einen kleineren Fluidkanal findet dementsprechend eine Veränderung des Volumenflusses und des Druckes statt, so dass das fortbewegte Volumen unabhängig von der Querschnittsfläche der Fluidkanäle gleich bleibt.

#### 4.6.4. Kanalartige Trichter

Unter anderen physikalischen Elementen werden in Düsenkanälen Trichter eingesetzt, die einen besseren Zulauf des Fluids zur kleinen Düse leisten. Eine Modellabbildung solcher physikalischen Elemente in der Netzwerktheorie mit konzentrierten Parametern ist unbekannt und aus diesem Grund wird hier ein Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsparameter für diese Elemente neu hergeleitet.

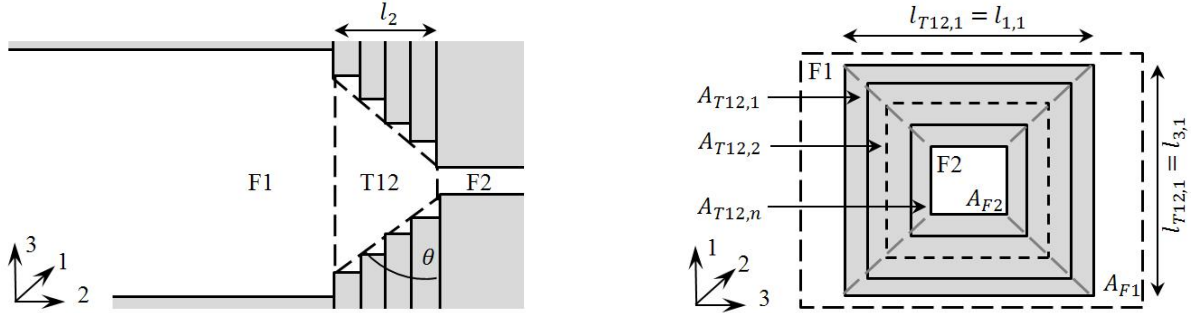
Die Trichter besitzen herstellungstechnisch bedingt die Form eines geraden Pyramidenstumpfs, wie in der Abbildung 4.16 gezeigt. Hier ist ein Trichter zwischen dem Fluidkanal 1 und dem Fluidkanal 2 abgebildet. Der Trichter läuft aufgrund der Orientierung von Hauptkristallebenen im kristallinen Silizium unter einem Winkel  $\theta$  von  $45^\circ$  oder  $54,7^\circ$  zu [147]. Für einfachere Handhabung werden im weiteren der Fluidkanal 1 und 2 durch Indizes F1 und F2 gekennzeichnet und der Trichter selbst mit T12.



**Abbildung 4.16.:** Geometrie eines Trichters zwischen Fluidkanal 1 und Fluidkanal 2. Der Zulauf des Trichters im kristallinen Silizium ist herstellungstechnisch nur unter einem Winkel  $\theta$  von  $45^\circ$  oder  $54,7^\circ$  möglich. Links ist der Querschnitt des Trichters abgebildet und rechts ist die Draufsicht gezeigt.

In dieser Arbeit wird angenommen, dass der Trichter Eigenschaften eines kanalartigen Fluidkanals besitzt und in dem nur eine Fluidbewegung und keine Kompression stattfindet. Die Modellabbildung des Trichters ist somit durch die Bauelemente  $L_{T12}^A$  und  $R_{T12}^A$

möglich, die akustische Masse und Reibung im Trichter beschreiben. Durch die Änderung des Querschnitts wird der Trichter als Summe mehrerer infinitesimaler Fluidkanäle, die transformatorisch miteinander verknüpft sind, abgebildet.



**Abbildung 4.17.:** Die Zerlegung des Trichters T12 in infinitesimale Fluidkanäle. Der Trichter wird durch mehrerer Fluidkanäle mit unterschiedlichem Querschnitt abgebildet. Die Fluidkanäle stellen eine Verbindung zwischen Fluidkanal F1 und Fluidkanal F2 dar.

Unter der Annahme, dass der Trichter in  $k$  kleine Fluidkanäle zerlegt wird und jeder Fluidkanal durch Reihenschaltung der Bauelemente  $L_{T12,n}^A$  und  $R_{T12,n}^A$  beschrieben werden kann, kann das Verhalten des infinitesimalen Fluidkanals durch folgende Kettenmatrix beschrieben werden:

$$\underline{A}_{T12,n} = \begin{bmatrix} 1 & R_{T12,n}^A + j\omega L_{T12,n}^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Da die einzelnen infinitesimalen Fluidkanäle durch die Transformatoren verknüpft sind, kann der Trichter durch:

$$\underline{A}_{T12} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{X_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_{T12,1}^A + j\omega L_{T12,1}^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{X_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_{T12,2}^A + j\omega L_{T12,2}^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} X_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{X_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_{T12,n}^A + j\omega L_{T12,n}^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{n+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{X_{n+1}} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

charakterisiert werden. Dabei beschreibt die erste Kettenmatrix  $\underline{X}_1$  den Übergang des Fluidkanals F1 in den Trichter T12 und die Kettenmatrix  $\underline{X}_{n+1}$  den Übergang des Trichters in den Fluidkanal F2. Die Zerlegung des Trichters in infinitesimale Fluidkanäle ist in der Abbildung 4.17 gezeigt.

Nun können die Kettenmatrizen der infinitesimalen Fluidkanäle auf die linke Seite trans-

formiert werden, weitere Erläuterungen dazu erfolgen im Abschnitt 4.7.2. Es entsteht nach der Transformation des ersten infinitesimalen Fluidkanals folgende Darstellung:

$$\underline{A}_{T12} = \begin{bmatrix} 1 & X_1^2(R_{T12,1}^A + j\omega L_{T12,1}^A) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{X_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{X_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_{T12,2}^A + j\omega L_{T12,2}^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} X_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{X_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_{T12,n}^A + j\omega L_{T12,n}^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{n+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{X_{n+1}} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

und nach  $n$  weiteren Transformationen:

$$\underline{A}_{T12} = \begin{bmatrix} 1 & X_1^2(R_{T12,1}^A + j\omega L_{T12,1}^A) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_1^2 X_2^2 (R_{T12,2}^A + j\omega L_{T12,2}^A) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & X_1^2 X_2^2 \dots X_n^2 (R_{T12,n}^A + j\omega L_{T12,n}^A) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 X_2 \dots X_{n+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{X_1 X_2 \dots X_{n+1}} \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

Betrachtet man nun die transformatorischen Konstanten  $X_n$ , so sind diese wie folgt definiert:

$$X_1 = \frac{A_{T12,1}}{A_{F1}}, \quad X_2 = \frac{A_{T12,2}}{A_{T12,1}}, \quad X_{n+1} = \frac{A_{F2}}{A_{T12,n}}. \quad (4.59)$$

Für das Produkt der transformatorischen Konstanten ergibt sich:

$$\begin{aligned} X_1 X_2 &= \frac{A_{T12,1}}{A_{F1}} \frac{A_{T12,2}}{A_{T12,1}} = \frac{A_{T12,2}}{A_{F1}}, \\ X_1 X_2 \dots X_n &= \frac{A_{T12,1}}{A_{F1}} \frac{A_{T12,2}}{A_{T12,1}} \dots \frac{A_{T12,n}}{A_{T12,n-1}} = \frac{A_{T12,n}}{A_{F1}}, \\ X_1 X_2 \dots X_{n+1} &= \frac{A_{T12,1}}{A_{F1}} \frac{A_{T12,2}}{A_{T12,1}} \dots \frac{A_{F2}}{A_{T12,n+1}} = \frac{A_{F2}}{A_{F1}} = X_{T12}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Dadurch können die Kettenmatrizen infinitesimaler Fluidkanäle weiter vereinfacht werden und es folgt für die Elemente  $\underline{a}_{12,n}$  der Kettenmatrizen  $\underline{A}_{T12,n}$  infinitesimaler Fluid-

kanäle:

$$\begin{aligned}
 \underline{a}_{12,1} &= \frac{A_{T12,1}^2}{A_{F1}^2} (R_{T12,1}^A + j\omega L_{T12,1}^A), \\
 \underline{a}_{12,2} &= \frac{A_{T12,2}^2}{A_{F1}^2} (R_{T12,2}^A + j\omega L_{T12,2}^A), \\
 \underline{a}_{12,n} &= \frac{A_{T12,n}^2}{A_{F1}^2} (R_{T12,n}^A + j\omega L_{T12,n}^A).
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Nun können die infinitesimalen Bauelemente  $R_{T12,n}^A$  und  $L_{T12,n}^A$  berechnet werden. Die beiden Abmessungen  $l_{1,n}$  und  $l_{3,n}$  sind herstellungstechnisch gleich und sind in der Abbildung 4.17 gezeigt. Somit können die Abmessungen  $l_{1,n}$  und  $l_{3,n}$  gleich  $l_{T12,n}$  gesetzt werden. Es folgt somit:

$$\begin{aligned}
 R_{T12,n}^A &= 12\eta \frac{l_{2,n}}{l_{1,n}l_{3,n}^3} = 12\eta \frac{l_2}{k} \frac{1}{l_{1,n}l_{3,n}^3} = 12\eta \frac{l_2}{k} \frac{1}{l_{T12,n}^4} = 12\eta \frac{l_2}{k} \frac{1}{A_{T12,n}^2}, \\
 L_{T12,n}^A &= \frac{l_{2,n}\rho_0}{A_{T12,n}} = \frac{l_2}{k} \frac{\rho_0}{A_{T12,n}}.
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Die Fläche  $A_{T12,n}$  des infinitesimalen Fluidkanals ist dann durch

$$A_{T12,n} = l_{T12,n}^2 = (l_{T12,1} - n\Delta l)^2 = (l_{T12,1} - n \frac{l_2}{k} \tan \theta)^2 \tag{4.63}$$

gegeben.

Nun können die Elemente  $\underline{a}_{12,n}$  der Kettenmatrizen infinitesimaler Fluidkanäle durch die Gleichungen 4.62 vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
 \underline{a}_{12,n} &= \frac{A_{T12,n}^2}{A_{F1}^2} (R_{T12,n}^A + j\omega L_{T12,n}^A) \\
 &= \frac{A_{T12,n}^2}{A_{F1}^2} (12\eta \frac{l_2}{k} \frac{1}{A_{T12,n}^2} + j\omega \frac{l_2}{k} \frac{\rho_0}{A_{T12,n}}) \\
 &= \frac{1}{A_{F1}^2} (12\eta \frac{l_2}{k} + j\omega \frac{l_2}{k} \rho_0 A_{T12,n}).
 \end{aligned} \tag{4.64}$$



Damit wird die Kettenmatrix  $\underline{A}_{T12}$  des Trichters T12 zu:

$$\underline{A}_{T12} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{A_{F1}^2}(12\eta \frac{l_2}{k} + j\omega \frac{l_2}{k} \rho_0 A_{T12,1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{A_{F1}^2}(12\eta \frac{l_2}{k} + j\omega \frac{l_2}{k} \rho_0 A_{T12,2}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{A_{F1}^2}(12\eta \frac{l_2}{k} + j\omega \frac{l_2}{k} \rho_0 A_{T12,n}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{T12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{X_{T12}} \end{bmatrix}. \quad (4.65)$$

Die Kettenmatrizen der infinitesimalen Fluidkanäle können leicht miteinander multipliziert werden, so dass anschließend für das Element  $\underline{a}_{12}$  der Kettenmatrix  $\underline{A}_{T12}$  des Trichters gilt:

$$\begin{aligned} \underline{a}_{12} &= \frac{1}{A_{F1}^2} \left( \sum_{n=1}^k 12\eta \frac{l_2}{k} + \sum_{n=1}^k j\omega \frac{l_2}{k} \rho_0 A_{T12,n} \right) \\ &= 12\eta \frac{l_2}{A_{F1}^2} + j\omega \frac{\rho_0}{A_{F1}^2} \sum_{n=1}^k \frac{l_2}{k} A_{T12,n} \\ &= 12\eta \frac{l_2}{A_{F1}^2} + j\omega \frac{\rho_0}{A_{F1}^2} \sum_{n=1}^k \frac{l_2}{k} (l_{T12,1} - n \frac{l_2}{k} \tan \theta)^2. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Die Kettenmatrix  $\underline{A}_{T12}$  des Trichters T12 entspricht dann:

$$\underline{A}_{T12} = \begin{bmatrix} 1 & 12\eta \frac{l_2}{A_{F1}^2} + j\omega \frac{\rho_0}{A_{F1}^2} \sum_{n=1}^k \frac{l_2}{k} (l_{T12,1} - n \frac{l_2}{k} \tan \theta)^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{T12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{X_{T12}} \end{bmatrix}. \quad (4.67)$$

Durch weitere Definition:

$$\begin{aligned} R_{T12}^A &= 12\eta \frac{l_2}{A_{F1}^2}, \\ L_{T12}^A &= \frac{\rho_0}{A_{F1}^2} \sum_{n=1}^k \frac{l_2}{k} (l_{T12,1} - n \frac{l_2}{k} \tan \theta)^2 \end{aligned} \quad (4.68)$$

resultiert eine vereinfachte Darstellung der Kettenmatrizen des Trichters T12:

$$\begin{aligned}\underline{A}_{T12} &= \begin{bmatrix} 1 & R_{T12}^A + j\omega L_{T12}^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{T12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{X_{T12}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & R_{T12}^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j\omega L_{T12}^A \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{T12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{X_{T12}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Diese Darstellung entspricht den in Reihe geschalteten Bauelementen  $R_{T12}^A$  und  $L_{T12}^A$  mit einem anschließenden Übergang zu kleinerem Kanal, der durch einen Transformator  $\underline{X}_{T12}$  abgebildet wird.

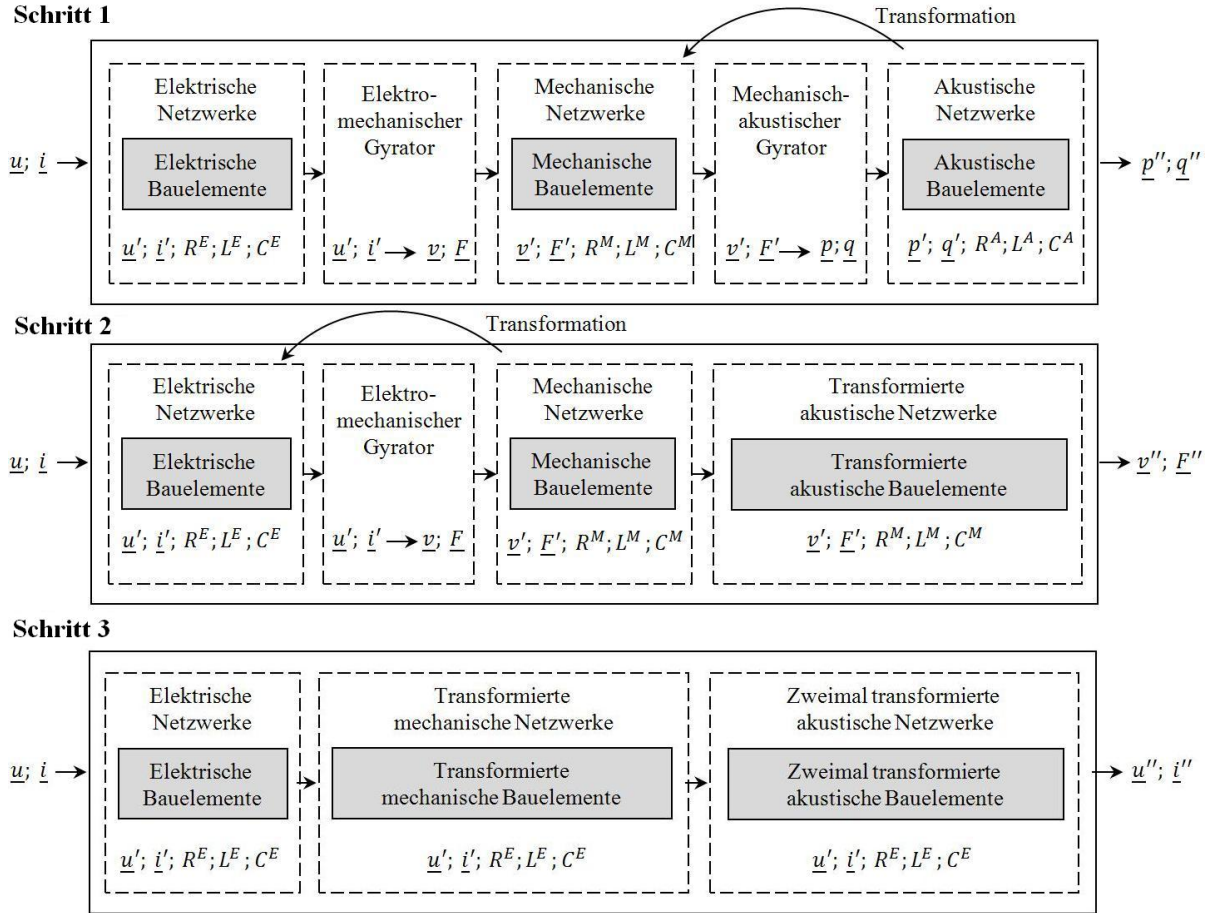
Aus den Gleichungen 4.68 kann direkt abgelesen werden, dass das Bauelement  $R_{T12}^A$  unabhängig von der Anzahl der infinitesimalen Fluidkanäle ist. Die akustische Masse im Fluidkanal, die durch das Bauelement  $L_{T12}^A$  abgebildet wird, ändert sich dagegen in Abhängigkeit von dem Querschnitt der infinitesimalen Fluidkanäle. Die Summenreihe konvergiert jedoch gegen 0 für  $n \rightarrow \infty$  und somit der Wert des Bauelements  $L_{T12}^A$  konvergiert zu einem endlichen Wert.

## 4.7. Gesamte physikalische Struktur

Um die Modellabbildung der physikalischen Struktur mit den in diesem Kapitel beschriebenen Netzwerken zu erstellen, wird diese zuerst in ihre Teil- und Kopplungsstrukturen zerlegt, wie in der Abbildung 3.1 auf der Seite 18 vorgestellt. Anschließend werden physikalische Elemente der Teil- und Kopplungsstrukturen durch Netzwerke abgebildet. Sind Geometrien und Eigenschaften der physikalischen Elemente bekannt, so können einzelne Bauelemente in den Netzwerken begerechnet werden.

Da jedes Netzwerk durch eine Kettenmatrix mit entsprechenden Bauelementen abgebildet wird, entsteht die Kettenmatrix des gesamten Modells durch Multiplikation der Kettenmatrizen einzelner Netzwerke. Die Kettenmatrix des Modells beschreibt dann das Verhalten der gesamten physikalischen Struktur.

In der Kettenmatrix der gesamten physikalischen Struktur sind sowohl gyratorische als auch transformatorische Verknüpfungen vorhanden. Dadurch wird die Kettenmatrix des Modells durch mehrere Koordinatenpaare und elektrische, mechanische und akustische Bauelemente beschrieben. Um die Anzahl der relevanten Koordinaten zu reduzieren, können Netzwerke von der mechanischen und der akustischen Seite auf die elektrische Seite



**Abbildung 4.18.:** Transformation der Netzwerke auf die elektrische Seite. Durch die mechanisch-akustische gyratorische Verknüpfung werden zuerst akustische Netzwerke auf die mechanische Seite transformiert. Anschließend werden mechanische Netzwerke, unter denen auch transformierte akustische Netzwerke, durch die elektrisch-mechanische gyratorische Verknüpfung auf die elektrische Seite überführt.

transformiert werden. Durch diese Transformation wird die Anzahl der Koordinatenpaare auf elektrische Koordinaten reduziert und mechanische und akustische Bauelemente in elektrische Bauelemente überführt. Anschließend kann das Modell auf der elektrischen Seite charakterisiert werden.

Die Abbildung 4.18 zeigt die Überführung der Modellabbildung der gesamten physikalischen Struktur auf die elektrische Seite. Im ersten Schritt werden durch die mechanisch-akustische gyratorische Verknüpfung akustische Netzwerke auf mechanische Seite transformiert. Dadurch werden akustische Elemente durch mechanische Bauelemente abgebildet. Der Ausgleichsfaktor und die Anpassung der Einheiten wird dabei durch die gyratorische Konstante  $Y$  gegeben. Im zweiten Schritt werden die mechanischen Netzwerke auf die elektrische Seite durch die elektro-mechanische gyratorische Verknüpfung transformiert. Dadurch gehen mechanische Bauelemente in die elektrischen über.

Durch diese Transformation entsteht ein Modell der physikalischen Struktur, das nur durch elektrische Netzwerke und elektrische Bauelemente abgebildet wird. Dabei bleibt das Verhalten der transformierten Modellabbildungen gleich der untransformierten Modellabbildungen, eine Charakterisierung kann jedoch leichter erfolgen.

#### 4.7.1. Gyratorische Transformation der Netzwerke

Die gyratorische Transformation wie diese im Schritt eins und zwei in der Abbildung 4.18 dargestellt ist, kann direkt in der Kettenmatrixform erfolgen. Hier wird diese Transformation am Beispiel einer allgemeinen Kettenmatrix beschrieben. Zur Transformation werden die rechts stehenden Kettenmatrizen der Netzwerke auf die linke Seite der Gyrator-Kettenmatrix überführt. Die Multiplikation einer Kettenmatrix  $\underline{A}$  der Form:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

mit der Kettenmatrix eines Gyrtors  $\underline{Y}$  führt zum Ausdruck:

$$\underline{Y} \cdot \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & Y \\ \frac{1}{Y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y\underline{a}_{21} & Y\underline{a}_{22} \\ \frac{1}{Y}\underline{a}_{11} & \frac{1}{Y}\underline{a}_{21} \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Dies entspricht einem Netzwerk auf der linken Seite des Gyrtors:

$$\underline{Y} \cdot \underline{A} = \begin{bmatrix} Y\underline{a}_{21} & Y\underline{a}_{22} \\ \frac{1}{Y}\underline{a}_{11} & \frac{1}{Y}\underline{a}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{22} & Y^2\underline{a}_{21} \\ \frac{1}{Y^2}\underline{a}_{12} & \underline{a}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Y \\ \frac{1}{Y} & 0 \end{bmatrix} = \underline{A}_Y \cdot \underline{Y} \quad (4.72)$$

mit der Kettenmatrix  $\underline{A}_Y$ :

$$\underline{A}_Y = \begin{bmatrix} \underline{a}_{22} & Y^2\underline{a}_{21} \\ \frac{1}{Y^2}\underline{a}_{12} & \underline{a}_{11} \end{bmatrix}. \quad (4.73)$$

Die gyratorische Transformation:

$$\underline{Y} \cdot \underline{A}_L = \begin{bmatrix} 0 & Y \\ \frac{1}{Y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \underline{Z}_L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Y^2\underline{Z}_L} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Y \\ \frac{1}{Y} & 0 \end{bmatrix} = \underline{A}'_Q \cdot \underline{Y} \quad (4.74)$$

führt bei der Transformation einer einfachen Längs-Kettenmatrix  $\underline{A}_L$  zu einer Quer-Kettenmatrix  $\underline{A}_Q$  und einer Quer-Kettenmatrix  $\underline{A}_Q$  zu Längs-Kettenmatrix  $\underline{A}_L$ :

$$\underline{Y} \cdot \underline{A}_Q = \begin{bmatrix} 0 & Y \\ \frac{1}{Y} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_Q} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Y^2 Z_Q \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Y \\ \frac{1}{Y} & 0 \end{bmatrix} = \underline{A}'_L \cdot \underline{Y}. \quad (4.75)$$

Aus diesem Grund können einzelne Bauelemente auf einfache Weise transformiert werden. Der verknüpfende Faktor bei den Bauelementen ist dann die gyratorische Konstante  $Y$ , die eine leistungsgleiche Modellabbildung des Bauelementes auf der anderen Seite erlaubt.

#### 4.7.2. Transformatorische Transformation der Netzwerke

Die transformatorische Transformation der Netzwerke, insbesondere in der akustischen Teilstruktur kann ähnlich wie im Teilkapitel 4.7.1 beschrieben werden. Die Multiplikation der Kettenmatrix  $\underline{A}$  mit der Kettenmatrix eines Transformators  $\underline{X}$  führt zu:

$$\underline{X} \cdot \underline{A} = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & \frac{1}{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \underline{a}_{11} & X \underline{a}_{12} \\ \frac{1}{X} \underline{a}_{21} & \frac{1}{X} \underline{a}_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.76)$$

Dies entspricht einer Kettenmatrix  $\underline{A}_X$  auf der linken Seite der Kettenmatrix  $\underline{X}$ :

$$\underline{X} \cdot \underline{A} = \begin{bmatrix} X \underline{a}_{11} & X \underline{a}_{12} \\ \frac{1}{X} \underline{a}_{21} & \frac{1}{X} \underline{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{11} & X^2 \underline{a}_{12} \\ \frac{1}{X^2} \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & \frac{1}{X} \end{bmatrix} = \underline{A}_X \cdot \underline{X}. \quad (4.77)$$

Die transformierte Kettenmatrix  $\underline{A}_X$  hat dann die Form:

$$\underline{A}_X = \begin{bmatrix} \underline{a}_{11} & X^2 \underline{a}_{12} \\ \frac{1}{X^2} \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.78)$$

Die transformatorische Transformation der Längs- und Quer-Kettenmatrizen führt zu derselben Darstellung:

$$\underline{X} \cdot \underline{A}_L = \begin{bmatrix} 0 & X \\ \frac{1}{X} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z_L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X^2 Z_L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & X \\ \frac{1}{X} & 0 \end{bmatrix} = \underline{A}'_L \cdot \underline{X} \quad (4.79)$$

und:

$$\underline{X} \cdot \underline{A}_Q = \begin{bmatrix} 0 & X \\ \frac{1}{X} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_Q} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{X^2 Z_Q} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & X \\ \frac{1}{X} & 0 \end{bmatrix} = \underline{A}'_Q \cdot \underline{X}. \quad (4.80)$$

Der verknüpfende Faktor ist dabei die transformatorische Konstante  $X$ . Diese ist einheitsfrei und führt lediglich zu Änderung der Bauelemente.

## 4.8. Schlußfolgerungen

In diesem Kapitel wurden physikalische Elemente der Düsenkanäle in einem Piezo-Inkjetsystem mittels Netzwerktheorie mit konzentrierten Parametern abgebildet. Der Düsenkanal wurde dazu in physikalische Teil- und Kopplungsstrukturen zerlegt und anschließend wurden einzelne physikalische Elemente dieser Strukturen modelliert. Physikalische Elemente wurden im Modell durch Netzwerke abgebildet und Eigenschaften der physikalischen Elemente mit Bauelementen in Zusammenhang gebracht.

Modellabbildungen mehrerer physikalischer Elemente sind bereits in der Netzwerktheorie bekannt und wurden daher übernommen. Modellabbildungen von in der Netzwerktheorie nicht beschriebener physikalischer Elemente, wie beispielweise Trichter, wurden in diesem Kapitel neu hergeleitet.

Die in diesem Kapitel vorgestellten Modellabbildungen können auf viele Inkjetsysteme übertragen werden, indem hier vorgestellte allgemeine Zusammenhänge in jedem konkreten Fall spezialisiert werden. Durch die einzelnen Modellabbildungen kann ein Modell der gesamten physikalischen Struktur erstellt werden. Zusätzlich wurde die Möglichkeit zur Transformation der Netzwerke von der mechanischen und der akustischen auf die elektrische Seite vorgestellt, die eine einfachere Charakterisierung des Modells und somit der physikalischen Struktur erlaubt.

Im nächsten Kapitel werden die Modellabbildungen physikalischer Elemente der Piezo-Inkjetsysteme mit verteilten Parametern vorgestellt. Dazu werden zuerst ein abstrakter Wellenleiter mit konstantem und variablem Querschnitt sowie ein abstraktes Kopplungselement beschrieben. Anschließend werden die abstrakten Modellabbildungen auf reale physikalische Elemente der Piezo-Inkjetsysteme übertragen.

---

## 5. Modellierung mit verteilten Parametern

In diesem Kapitel wird eine Erweiterung des Netzwerkmodells mit konzentrierten Parametern vorgestellt. Unter der Annahme, dass die Wellenlängen im Düsenkanal in den Bereich der Abmessungen von physikalischen Elementen kommen, kann durch die Darstellung mit verteilten Parametern eine weitere Verbesserung der Modellabbildung erreicht werden.

Die Modellabbildungen von physikalischen Elementen mit verteilten Parametern sind in der Netzwerktheorie bereits bekannt und werden an dieser Stelle vorgestellt [121][132][148][133]. Um jedoch die Übertragbarkeit der Modellabbildungen auf möglichst viele Piezo-Inkjetsysteme zu leisten, wird hier eine Abstraktion der bekannten Modellabbildungen vorgenommen.

### 5.1. Abstrakter Wellenleiter

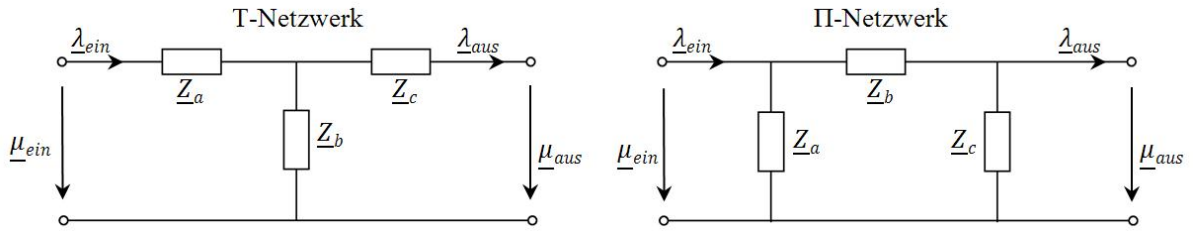
Da in Piezo-Inkjetsystemen physikalische Elemente in der Regel nur in eine Dimension ausgedehnt sind, können diese durch eindimensionale Wellenleiter modelliert werden. Die Ausdehnung in eine Dimension ist einerseits durch die physikalische Dicke des Siliziumwafers gegeben. Hier wird bestrebt, möglichst dünne Platten zu verwenden, um Materialkosten abzusetzen. Andererseits wird versucht, die Düsenkanäle möglichst nah zu einander zu legen, um eine hohe Auflösung des Druckkopfes durch einen geringen Abstand der Düsen voneinander zu erreichen. Somit ist die Ausdehnung der Düsenkanäle nur in eine Richtung möglich. Es wird also angenommen, dass nur in einer Dimension des physikalischen Elements die Grenzfrequenz  $\omega_g$ , wie in der Gleichung 3.1 auf der Seite 20 definiert, überschritten wird.

#### 5.1.1. Eindimensionaler Wellenleiter

Zur Modellabbildung eines eindimensionalen Wellenleiters wird angenommen, dass das zu beschreibende physikalische Element durch ein  $\Pi$ - oder einen T-Netzwerk, wie in der Abbildung 5.1 gezeigt ist, dargestellt werden kann.

Durch die Zusammenfassung der Bauelemente in komplexen Netzwerken kann eine solche Darstellung erreicht werden. Die Bauelemente des abgebildeten Netzwerkes werden dann durch die komplexen Impedanzen  $\underline{Z}_a$ ,  $\underline{Z}_b$  und  $\underline{Z}_c$  charakterisiert.

Um die Vorgänge im physikalischen Element ortsabhängig wiederzugeben, wird dieses durch  $k$  in Reihe oder parallel geschaltete infinitesimale Netzwerke beschrieben. Jedes infinitesimale Netzwerk stellt die Änderung der Fluss- und Differenzkoordinate im infinitesimalen physikalischen Element entlang einer Dimension, wie die Abbildung 5.2 zeigt, dar. Die Ausdehnung in andere Dimensionen wird als vernachlässigbar klein im Vergleich zu auftretenden Wellenlängen angenommen.



**Abbildung 5.1.:** Modellabbildung eines physikalischen Elementes durch einen T- oder  $\Pi$ -Netzwerk. Die komplexe Impedanzen  $\underline{Z}_a$ ,  $\underline{Z}_b$  und  $\underline{Z}_c$  sind durch die Bauelemente gegeben.

Die Bauelemente mit komplexen Impedanzen  $\underline{Z}'_a$ ,  $\underline{Z}'_b$  und  $\underline{Z}'_c$  des infinitesimalen Netzwerkes werden dabei auf die Länge des infinitesimalen physikalischen Elementes  $\Delta x$  bezogen. Somit gilt für die Impedanzen  $\underline{Z}'_a$ ,  $\underline{Z}'_b$  und  $\underline{Z}'_c$  bei einer Zerlegung in  $k$  infinitesimale Netzwerke:

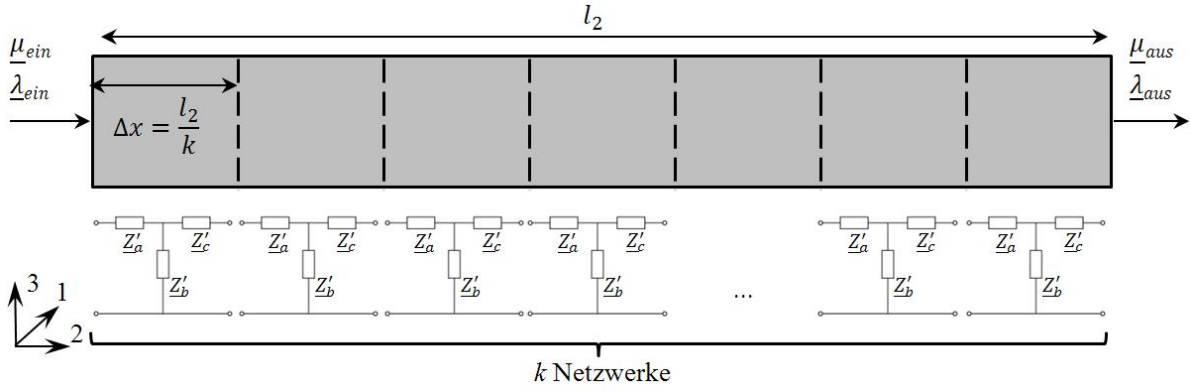
$$\underline{Z}'_a = \frac{1}{k} \underline{Z}_a, \quad \underline{Z}'_b = \frac{1}{k} \underline{Z}_b, \quad \underline{Z}'_c = \frac{1}{k} \underline{Z}_c. \quad (5.1)$$

Bei der Modellabbildung des physikalischen Elements mit infinitesimalen Netzwerken werden die Ausgangskordinaten eines infinitesimalen Netzwerkes mit den Eingangskordinaten des nachfolgenden infinitesimalen Netzwerkes verknüpft.

Dadurch wird eine permanente Änderung der Koordinaten im Netzwerk erreicht. Die Eingangskordinaten des Netzwerkes werden folglich zu Eingangskordinaten des ersten infinitesimalen Netzwerkes und die Ausgangskordinaten des letzten infinitesimalen Netzwerkes zu Ausgangskordinaten des Netzwerkes.

Werden mehrere infinitesimale  $\Pi$ - oder T-Netzwerke in Reihe geschaltet, so kann das Gesamtnetzwerk weiter vereinfacht und einzelne infinitesimale Netzwerke durch  $\Gamma$ -Netzwerke abgebildet werden. Wird eine unendliche Anzahl  $k$  an infinitesimalen Netzwerken angenommen, so können das erste und das letzte Netzwerk in dem Gesamtnetzwerk vernachlässigt werden. Diese haben keine ausschlaggebende Wirkung auf das Verhalten





**Abbildung 5.2.:** Zerlegung eines physikalischen Elementes in  $k$  infinitesimale T-Netzwerke. Die Bauelemente mit komplexen Impedanzen  $\underline{Z}'_a$ ,  $\underline{Z}'_b$  und  $\underline{Z}'_c$  sind auf die Länge des infinitesimalen physikalischen Elementes  $\Delta x$  in Richtung der Achse 2 bezogen.

des Gesamtnetzwerkes. Eine Vereinfachung des Gesamtnetzwerkes aus infinitesimalen T-Netzwerken zu dem Gesamtnetzwerk aus  $\Gamma$ -Netzwerken wird in der Abbildung 5.3 gezeigt. Die Bauelemente  $\underline{Z}'_a$  und  $\underline{Z}'_c$  werden zu dem Bauelement  $\underline{Z}_1$  zusammengefasst und das Bauelement  $\underline{Z}'_b$  wird gleich dem Bauelement  $\underline{Z}_2$  gesetzt.

Ein Beispiel ist in der Abbildung 5.3 gezeigt. Hier werden 5 infinitesimale T-Netzwerke zu 4 infinitesimalen  $\Gamma$ -Netzwerken zusammengefasst. Bei der Vereinfachung werden die Bauelemente  $\underline{Z}'_a$  und  $\underline{Z}'_b$  des ersten infinitesimalen Netzwerkes und das Bauelement  $\underline{Z}'_c$  der fünften infinitesimalen Netzwerkes werden hier vernachlässigt.

Eine ähnliche Vorgehensweise ist auch bei der Beschreibung des physikalischen Elements mit infinitesimalen  $\Pi$ -Netzwerken möglich. Hierbei werden ebenfalls die Bauelemente  $\underline{Z}'_a$  und  $\underline{Z}'_c$  zu dem Bauelement  $\underline{Z}_2$  zusammengefasst und das Bauelement  $\underline{Z}'_b$  ebenfalls gleich dem Bauelement  $\underline{Z}_2$  gesetzt.

Wird ein einziges infinitesimales  $\Gamma$ -Netzwerk betrachtet, so ist dieses durch den in der Abbildung 5.4 links gezeigten Vierpol gegeben. Die Eingangs- sowie Ausgangskordinaten des infinitesimalen Netzwerkes sind durch die Änderung der Koordinate  $x$  in Richtung der Achse 2 vorgegeben, so dass die Eingangs- und Ausgangskordinaten als Funktionen der Koordinate  $x$  dargestellt werden können:

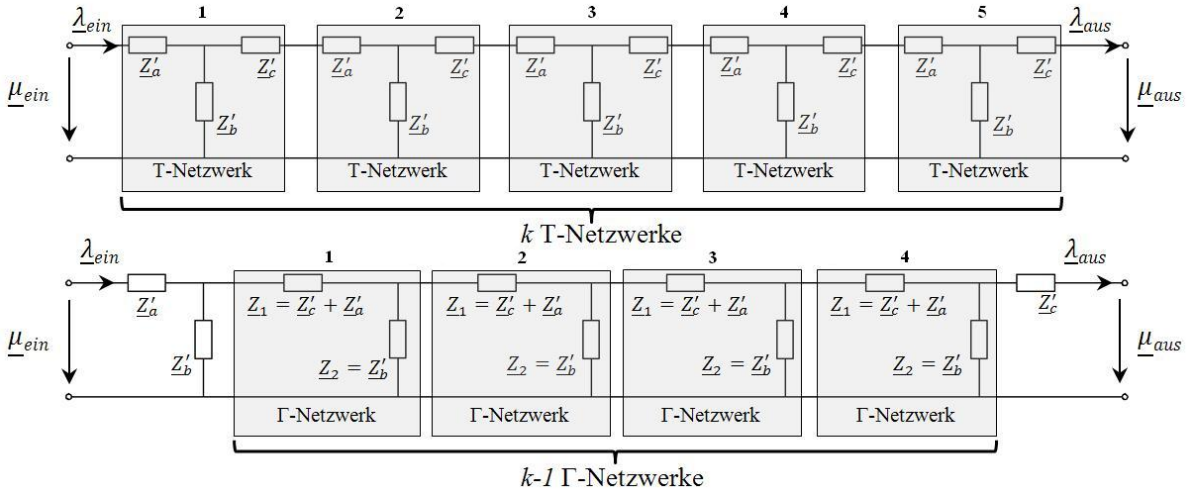
$$\underline{\mu}_{ein} \triangleq \underline{\mu}(x), \quad \underline{\lambda}_{ein} \triangleq \underline{\lambda}(x), \quad \underline{\mu}_{aus} \triangleq \underline{\mu}(x + \Delta x), \quad \underline{\lambda}_{aus} \triangleq \underline{\lambda}(x + \Delta x), \quad (5.2)$$

wie in der Abbildung 5.4 rechts gezeigt ist. Dabei ist die Änderung der Koordinate  $x$  mit

der Länge des infinitesimalen Elementes  $l_2/k$  wie folgt verknüpft:

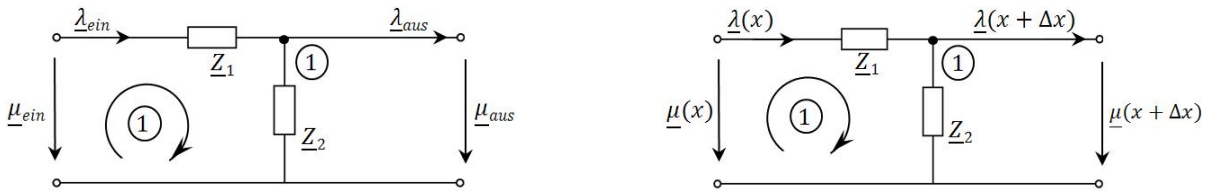
$$\Delta x = \frac{l_2}{k}. \quad (5.3)$$

Somit wird das Verhalten des Gesamtnetzwerkes durch das Verhalten mehrerer gleicher in Reihe geschalteter Netzwerke bestimmt.



**Abbildung 5.3.:** Vereinfachung des Gesamtnetzwerkes aus 5 infinitesimalen T-Netzwerken zu einem Gesamtnetzwerk aus 4 in Reihe geschalteten Γ-Netzwerken.

Die Darstellung des Gesamtnetzwerkes reduziert sich folglich auf die Beschreibung gleicher in Reihe geschalteter infinitesimaler Netzwerke.



**Abbildung 5.4.:** Links ist ein infinitesimales Netzwerk als Γ-Netzwerk zusammengefasst. Für die weitere Herleitung sind in der Abbildung Knotenpunkt und Masche eingetragen. Rechts ist dasselbe infinitesimale Netzwerk mit Verknüpfung der Koordinaten mit der Länge des physikalischen Elements  $\Delta x$  gezeigt.

Für das infinitesimale Γ-Netzwerk aus der Abbildung 5.4 rechts ergibt sich aus dem Maschensatz für die Differenzkoordinate  $\underline{\mu}(x)$  und aus dem Knotensatz für die Flusskoordinate  $\underline{\lambda}(x)$ :

$$\underline{\mu}(x) = \underline{Z}_1 \underline{\lambda}(x) + \underline{\mu}(x + \Delta x), \quad \underline{\lambda}(x) = \underline{\lambda}(x + \Delta x) + \frac{1}{\underline{Z}_2} \underline{\mu}(x + \Delta x). \quad (5.4)$$

Durch die Umformung der Gleichungen 5.4 und das Teilen durch  $\Delta x$  folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\underline{\mu}(x + \Delta x) - \underline{\mu}(x)}{\Delta x} &= -\underline{Z}_1 \frac{1}{\Delta x} \underline{\lambda}(x), \\ \frac{\underline{\lambda}(x + \Delta x) - \underline{\lambda}(x)}{\Delta x} &= \frac{1}{\underline{Z}_2} \frac{1}{\Delta x} \underline{\mu}(x + \Delta x).\end{aligned}\tag{5.5}$$

Die linke Seite der beiden Gleichungen 5.5 stellt eine Ableitung der Koordinaten  $\underline{\mu}(x)$  und  $\underline{\lambda}(x)$  dar. Somit gilt:

$$\frac{d\underline{\mu}(x)}{dx} = -\underline{Z}_1 \frac{1}{\Delta x} \underline{\lambda}(x), \quad \frac{d\underline{\lambda}(x)}{dx} = \frac{1}{\underline{Z}_2} \frac{1}{\Delta x} \underline{\mu}(x + \Delta x).\tag{5.6}$$

Werden die Gleichungen 5.6 noch einmal abgeleitet und die Ableitungen auf der rechten Seite wiederum mit den Gleichungen 5.6 ersetzt, so gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \underline{\mu}(x)}{dx^2} &= -\underline{Z}_1 \frac{1}{\Delta x} \frac{d\underline{\lambda}(x)}{dx} = -\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \frac{1}{\Delta x^2} \underline{\mu}(x), \\ \frac{d^2 \underline{\lambda}(x)}{dx^2} &= \frac{1}{\underline{Z}_2} \frac{1}{\Delta x} \frac{d\underline{\mu}(x + \Delta x)}{dx} = -\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \frac{1}{\Delta x^2} \underline{\lambda}(x).\end{aligned}\tag{5.7}$$

Nach der Definition einer ortsunabhängigen Konstante  $\beta$ :

$$\beta = \sqrt{-\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \frac{1}{\Delta x^2}}\tag{5.8}$$

ergibt sich für die Differenzkoordinate  $\underline{\mu}(x)$  eine allgemeine Lösung:

$$\underline{\mu}(x) = C_1 e^{j\beta x} + C_2 e^{-j\beta x}.\tag{5.9}$$

Durch das Ableiten dieser Lösung und einen direkten Vergleich mit der Gleichung 5.6 resultiert eine Lösung für die Flusskoordinate  $\underline{\lambda}(x)$ :

$$\frac{d\underline{\mu}(x)}{dx} = -\underline{Z}_1 \frac{1}{\Delta x} \underline{\lambda}(x) = j\beta C_1 e^{j\beta x} - j\beta C_2 e^{-j\beta x}.\tag{5.10}$$

Aus der Gleichung 5.10 folgt nach der Umformung:

$$\underline{\lambda}(x) = -\Delta x \frac{1}{\underline{Z}_1} \left( j\beta C_1 e^{j\beta x} - j\beta C_2 e^{-j\beta x} \right). \quad (5.11)$$

Eine ortsunabhängige Impedanz  $\underline{Z}_0$  kann weiterhin definiert werden. Diese beträgt:

$$\frac{1}{\underline{Z}_0} = \Delta x j\beta \frac{1}{\underline{Z}_1}. \quad (5.12)$$

Demnach ist die Lösung für Koordinaten  $\underline{\mu}(x)$  und  $\underline{\lambda}(x)$  durch:

$$\underline{\mu}(x) = C_1 e^{j\beta x} + C_2 e^{-j\beta x}, \quad \underline{\lambda}(x) = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \left( C_1 e^{j\beta x} - C_2 e^{-j\beta x} \right) \quad (5.13)$$

festgelegt. Die Proportionalitätsfaktoren  $\underline{C}_1$  und  $\underline{C}_2$  werden durch Randbedingungen bestimmt. Am Anfang des physikalischen Elements gilt im ersten infinitesimalen Netzwerk für die Differenzkoordinate  $\underline{\mu}(x)$  und für die Flusskoordinate  $\underline{\lambda}(x)$ :

$$\underline{\mu}(x=0) = \underline{\mu}_{ein} = C_1 + C_2, \quad \underline{\lambda}(x=0) = \underline{\lambda}_{ein} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} (C_1 - C_2). \quad (5.14)$$

Für die Proportionalitätsfaktoren  $\underline{C}_1$  und  $\underline{C}_2$  folgt dann:

$$\underline{C}_1 = \frac{1}{2} \left( \underline{\mu}_{ein} - \underline{Z}_0 \underline{\lambda}_{ein} \right), \quad \underline{C}_2 = \frac{1}{2} \left( \underline{\mu}_{ein} + \underline{Z}_0 \underline{\lambda}_{ein} \right). \quad (5.15)$$

Am Ende des physikalischen Elements gilt im letzten infinitesimalen Netzwerk für die Differenzkoordinate  $\underline{\mu}(x)$  und Flusskoordinate  $\underline{\lambda}(x)$ :

$$\begin{aligned} \underline{\mu}(x=l) &= \underline{\mu}_{aus} = C_1 e^{j\beta l} + C_2 e^{-j\beta l}, \\ \underline{\lambda}(x=l) &= \underline{\lambda}_{aus} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \left( C_1 e^{j\beta l} - C_2 e^{-j\beta l} \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

und nach dem Einsetzen der Gleichungen 5.15:

$$\begin{aligned}\underline{\mu}_{aus} &= \frac{1}{2} \left( \underline{\mu}_{ein} - \underline{Z}_0 \underline{\lambda}_{ein} \right) e^{j\beta l} + \frac{1}{2} \left( \underline{\mu}_{ein} + \underline{Z}_0 \underline{\lambda}_{ein} \right) e^{-j\beta l}, \\ \underline{\lambda}_{aus} &= -\frac{1}{\underline{Z}_0} \left( \frac{1}{2} \left( \underline{\mu}_{ein} - \underline{Z}_0 \underline{\lambda}_{ein} \right) e^{j\beta l} - \frac{1}{2} \left( \underline{\mu}_{ein} + \underline{Z}_0 \underline{\lambda}_{ein} \right) e^{-j\beta l} \right).\end{aligned}\quad (5.17)$$

Die Exponentialfunktionen in den Gleichungen 5.17 können durch:

$$e^{j\beta l} = \cos \beta l + j \sin \beta l, \quad e^{-j\beta l} = \cos \beta l - j \sin \beta l \quad (5.18)$$

ersetzt werden.

Nach der Vereinfachung resultiert aus den Gleichungen 5.17 folgender Zusammenhang zwischen den Eingangs- und Ausgangskoordinaten:

$$\begin{aligned}\underline{\mu}_{aus} &= \cos \beta l \cdot \underline{\mu}_{ein} - j \underline{Z}_0 \sin \beta l \cdot \underline{\lambda}_{ein}, \\ \underline{\lambda}_{aus} &= -j \frac{1}{\underline{Z}_0} \sin \beta l \cdot \underline{\mu}_{ein} + \cos \beta l \cdot \underline{\lambda}_{ein}.\end{aligned}\quad (5.19)$$

Durch die Symmetrie der Sinus-Funktion wird schließlich folgender Zusammenhang erkennbar:

$$\begin{aligned}\underline{\mu}_{aus} &= \cos \beta l \cdot \underline{\mu}_{ein} + j \underline{Z}_0 \sin \beta l \cdot \underline{\lambda}_{ein}, \\ \underline{\lambda}_{aus} &= j \frac{1}{\underline{Z}_0} \sin \beta l \cdot \underline{\mu}_{ein} + \cos \beta l \cdot \underline{\lambda}_{ein}.\end{aligned}\quad (5.20)$$

Dieser kann folglich in der Kettenmatrixform wie folgt:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mu}_{aus} \\ \underline{\lambda}_{aus} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta l & \underline{Z}_0 \sin \beta l \\ j \frac{1}{\underline{Z}_0} \sin \beta l & \cos \beta l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mu}_{ein} \\ \underline{\lambda}_{ein} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

dargestellt werden.

Die Anpassung dieser allgemeinen Herleitung kann weiterhin auf verschiedene physikalische Elemente übertragen werden. Dazu werden die komplexen Impedanzen  $\underline{Z}_a$ ,  $\underline{Z}_b$ ,  $\underline{Z}_c$ , die Konstante  $\beta$  sowie die komplexe Impedanz  $\underline{Z}_0$  für das vorliegende physikalische

Element bestimmt und eine Modellabbildung erstellt.

### 5.1.2. Eindimensionaler Wellenleiter mit variablem Querschnitt

Bei der Beschreibung von physikalischen Elementen mit einem variablen Querschnitt wie beispielweise Trichter kann dieselbe Vorgehensweise wie oben angewendet werden. Durch die Änderung geometrischer Parameter werden die Impedanzen  $\underline{Z}_1$  und  $\underline{Z}_2$  nun auch ortsabhängig, so dass die umgeformten Gleichungen 5.6:

$$\underline{\lambda}(x) = -\Delta x \frac{1}{\underline{Z}_1(x)} \frac{d\underline{\mu}(x)}{dx}, \quad \underline{\mu}(x) = \underline{Z}_2(x) \Delta x \frac{d\underline{\lambda}(x)}{dx} \quad (5.22)$$

durch die Ableitung nach  $x$  zu folgenden Gleichungen führen:

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{\lambda}(x)}{dx} &= -\Delta x \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\underline{Z}_1(x)} \right) \frac{d\underline{\mu}(x)}{dx} + \frac{1}{\underline{Z}_1(x)} \frac{d^2\underline{\mu}(x)}{dx^2} \right), \\ \frac{d\underline{\mu}(x)}{dx} &= \Delta x \left( \frac{d\underline{Z}_2(x)}{dx} \frac{d\underline{\lambda}(x)}{dx} + \underline{Z}_2(x) \frac{d^2\underline{\lambda}(x)}{dx^2} \right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Nach dem Einsetzen der Gleichungen 5.22 in die Gleichungen 5.23 und anschließender Umformung resultiert letztendlich:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\underline{\mu}(x)}{dx^2} + \underline{Z}_1(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\underline{Z}_1(x)} \right) \frac{d\underline{\mu}(x)}{dx} + \frac{\underline{Z}_1(x)}{\underline{Z}_2(x)} \frac{1}{\Delta x^2} \underline{\mu}(x) &= 0, \\ \frac{d^2\underline{\lambda}(x)}{dx^2} + \frac{1}{\underline{Z}_2(x)} \frac{d\underline{Z}_2(x)}{dx} \frac{d\underline{\lambda}(x)}{dx} + \frac{\underline{Z}_1(x)}{\underline{Z}_2(x)} \frac{1}{\Delta x^2} \underline{\lambda}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Eine erneute Definition der Konstante  $\beta$  und der Impedanzen  $\underline{Z}_{0,1}$  und  $\underline{Z}_{0,2}$  durch:

$$\beta = \sqrt{-\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \frac{1}{\Delta x^2}}, \quad \underline{Z}_{0,1} = \underline{Z}_1(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\underline{Z}_1(x)} \right), \quad \underline{Z}_{0,2} = \frac{1}{\underline{Z}_2(x)} \frac{d\underline{Z}_2(x)}{dx} \quad (5.25)$$

führt für  $\underline{\mu}(x)$  und  $\underline{\lambda}(x)$  zu folgenden Gleichungen:

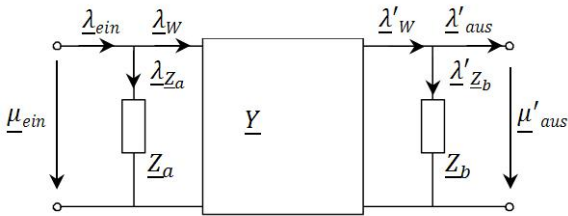
$$\frac{d^2\underline{\mu}(x)}{dx^2} + \underline{Z}_{0,1} \frac{d\underline{\mu}(x)}{dx} - \beta^2 \underline{\mu}(x) = 0, \quad \frac{d^2\underline{\lambda}(x)}{dx^2} + \underline{Z}_{0,2} \frac{d\underline{\lambda}(x)}{dx} - \beta^2 \underline{\lambda}(x) = 0. \quad (5.26)$$

Ist die Ortsabhängigkeit der komplexen Impedanzen  $\underline{Z}_1(x)$  und  $\underline{Z}_2(x)$  bekannt, so können die Gleichungen gelöst werden.

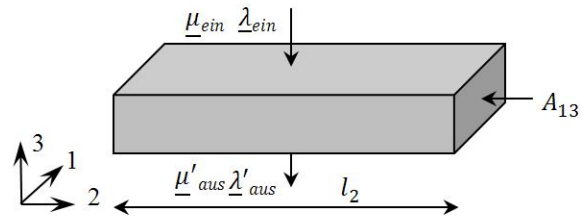
Die Kettenmatrix, wie im Abschnitt 5.1 dargestellt, entsteht hier auch durch die Verknüpfung aller Randbedingungen für Eingangs- und die Ausgangskordinaten.

## 5.2. Abstraktes Kopplungselement als Wellenleiter

In Piezo-Inkjetsystemen eingesetzte Kopplungsstrukturen können durch ein Netzwerk mit einem Gyrator modelliert werden. Ein abstraktes Kopplungselement ist in der Abbildung 5.5 und die dazugehörige Geometrie ist in der Abbildung 5.6 dargestellt.



**Abbildung 5.5.:** Ein abstraktes Kopplungselement, abgebildet durch komplexe Impedanzen  $\underline{Z}_a$  und  $\underline{Z}_b$  und einen Gyrator mit gyratorischer Konstante  $Y$ .



**Abbildung 5.6.:** Geometrie eines abstrakten Kopplungselementes und Verknüpfung der Eingangs- und Ausgangskordinaten.

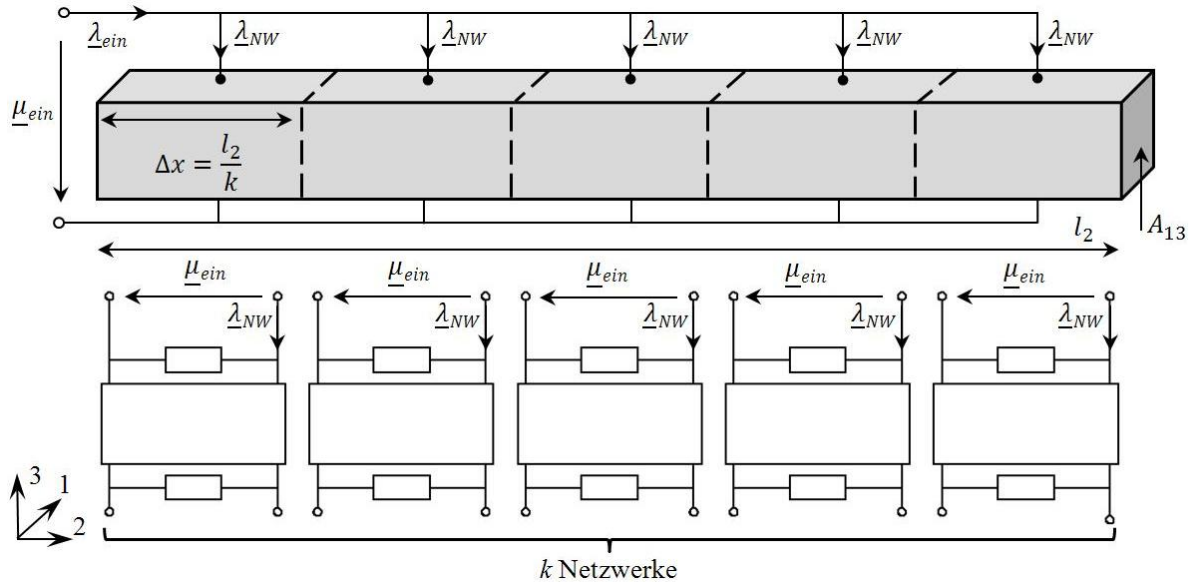
Um einen Übergang zu der Beschreibung mit verteilten Parametern zu gewährleisten, wird das physikalische Element in mehrere infinitesimale physikalische Elemente, wie in der Abbildung 5.7 gezeigt, zerlegt. Jedes infinitesimale physikalische Element wird durch ein infinitesimales Netzwerk beschrieben, die sich zu einem Gesamtnetzwerk zusammensetzen.

Die komplexen Impedanzen  $\underline{Z}_1$  und  $\underline{Z}_2$  werden hier wie bei einem eindimensionalen Wellenleiter auch durch die Anzahl infinitesimaler Netzwerke  $k$  bestimmt:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_a}{k}, \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_b}{k}. \quad (5.27)$$

Im Gegensatz zu dem einfachen eindimensionalen Wellenleiter werden die Netzwerke nicht in Reihe, sondern parallel geschaltet, vergleiche dazu Abbildung 5.8.

Wird die Masse des physikalischen Elements auf einer der Seiten berücksichtigt und abgebildet, so kann eine Vereinfachung des Gesamtnetzwerkes erfolgen. Wir nehmen an,

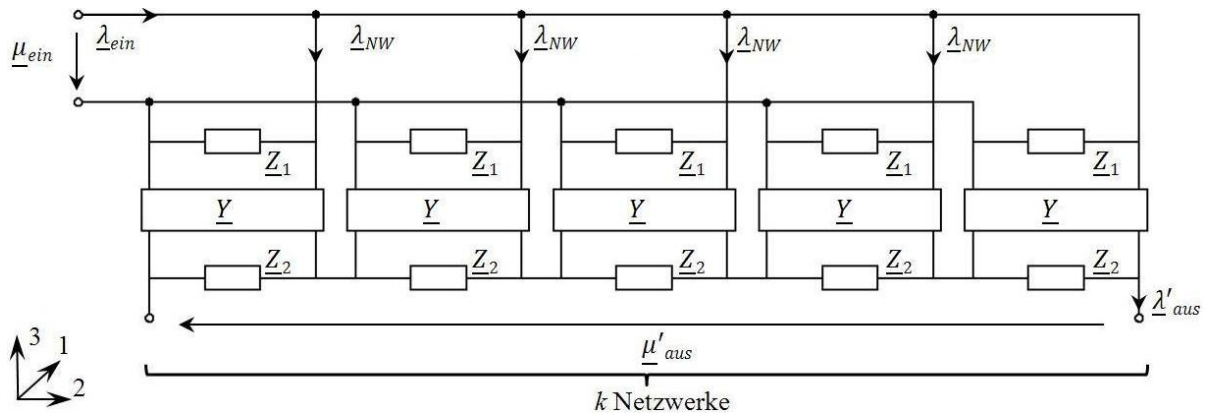


**Abbildung 5.7.:** Zerlegung einer Kopplungsstruktur (oben) in infinitesimale physikalische Elemente, die durch unten gezeigte infinitesimale Netzwerke im Modell abgebildet werden (unten).

dass die Impedanz  $\underline{Z}_1$  die Masse des physikalischen Elements in einem der Teilsysteme darstellt. Die komplexen Impedanzen  $\underline{Z}_1$  sind parallel geschaltet und können nun auf eine einfache Weise zusammengelegt werden:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{ges}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_1}. \quad (5.28)$$

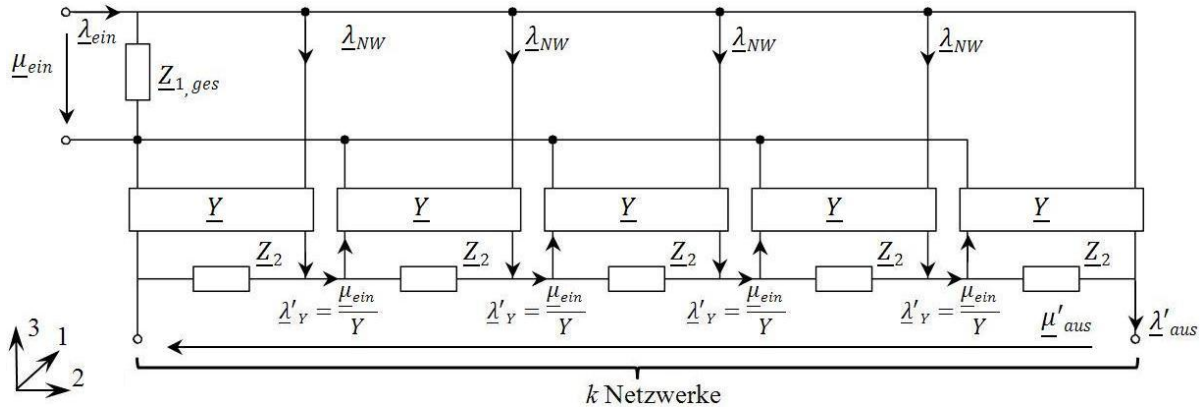
Das durch diese Vereinfachung entstandene Gesamtnetzwerk ist in der Abbildung 5.9 gezeigt.



**Abbildung 5.8.:** Zusammenschaltung aus  $k$  infinitesimalen Netzwerken zu einem Gesamtnetzwerk zur Modellierung des abstrakten Kopplungselements.

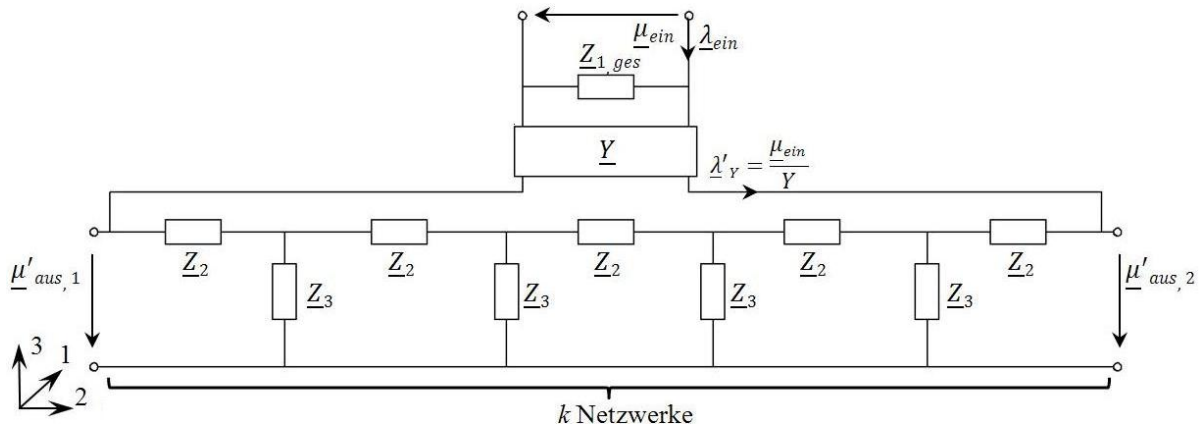


Wird nun die aus den infinitesimalen Gyrotoren ausgehende Flusskoordinate  $\underline{\mu}_{ein}/Y$  betrachtet, wie in der Abbildung 5.9 dargestellt, so können infinitesimale Gyrotoren ebenfalls zu einem zusammengefasst werden. Die entstandene Modellabbildung entspricht einem Netzwerk, das durch das Bauelement mit komplexer Impedanz  $\underline{Z}_{1,ges}$ , einen Gyrator mit gyratorischer Konstante  $Y$  und einen eindimensionalen Wellenleiter aus Bauelementen mit komplexer Impedanz  $\underline{Z}_2$  gegeben ist.



**Abbildung 5.9.:** Vereinfachung des Gesamtnetzwerkes durch Zusammenführen infinitesimaler Bauelemente zu einem Bauelement mit der komplexen Impedanz  $\underline{Z}_1$  auf einer Seite.

Um die Masse zu berücksichtigen, werden zu den Impedanzen  $\underline{Z}_2$  die Bauelemente mit der Impedanz  $\underline{Z}_3$  zur Beschreibung der Masse dazugeschaltet, so dass Wellenleiter durch infinitesimale  $\Pi$ -Netzwerke gegeben wird. Folglich entsteht gemäß der Abbildung 5.10 eine Gyrotordarstellung mit einem abstrakten eindimensionalen Wellenleiter, wie dieser in dem Abschnitt 5.1.1 vorgestellt wurde. Die Beschreibung des eindimensionalen Wellenleiters kann demnach wie im Abschnitt 5.1.1 behandelt durchgeführt werden.



**Abbildung 5.10.:** Abstraktes Kopplungselement, abgebildet durch das Bauelement mit komplexer Impedanz  $\underline{Z}_{1,ges}$ , einen Gyrator und einen eindimensionalen Wellenleiter.

Liegt im Gegensatz zu der hier dargestellten Beschreibung die Masse des Kopplungselements durch die Impedanz  $\underline{Z}_b$  vor, so führt die Darstellung mit infinitesimalen Netz-

werken zu einer ähnlichen Modellabbildung mit einem Wellenleiter auf der Seite des Bauelementes  $\underline{Z}_b$ .

### 5.3. Übertragung auf reale physikalische Elemente

Um eine physikalische Struktur abzubilden, werden die Zusammenhänge aus dem Abschnitt 5.1 auf reale physikalische Elemente, die in Piezo-Inkjetsystemen vorkommen, übertragen. Es werden sowohl akustische und mechanische Teilsysteme als auch akustisch-mechanische und elektro-mechanische Kopplungselemente auf gleiche Weise wie im Kapitel 4 nun mit verteilten Parametern beschrieben.

#### 5.3.1. Mechanische Teilstruktur

Eine mechanische Teilstruktur, die durch eine mechanische Schicht gegeben ist, kann, wie im Abschnitt 4.4 aufgeführt, durch ein Netzwerk mit dem Bauelement  $\mathcal{C}^M$ , das die mechanische Masse der Schicht abbildet, und dem Bauelement  $\mathcal{L}^M$ , das die Nachgiebigkeit abbildet, modelliert werden. Das Netzwerk und die dazugehörige Geometrie sind bereits in den Abbildungen 4.6 und 4.7 auf der Seite 35 gezeigt.

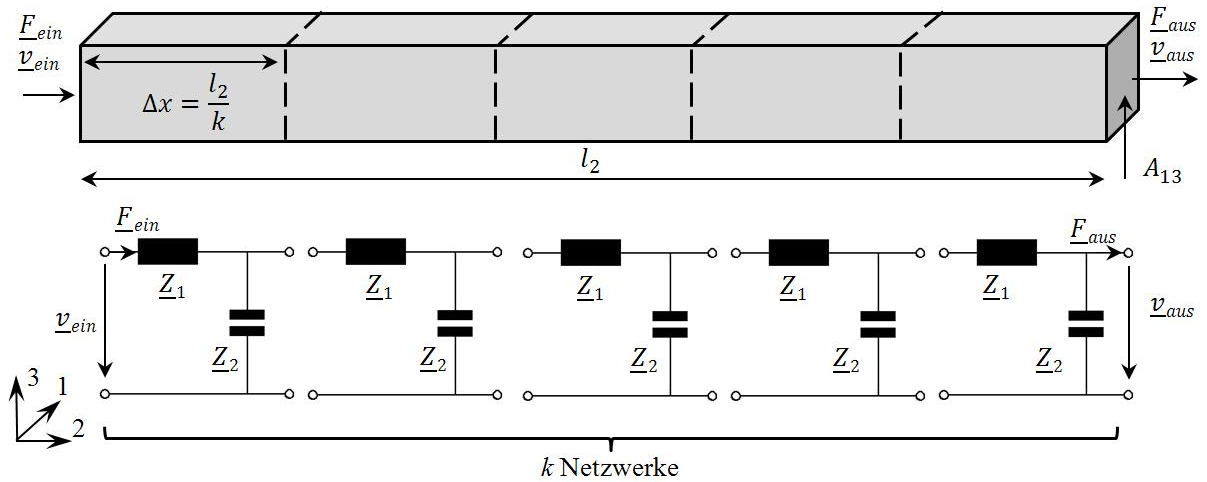


Abbildung 5.11.: Zerlegung einer zusätzlichen mechanischen Schicht in infinitesimale Netzwerke.

Zur Modellierung dieses physikalischen Elements als einen eindimensionalen Wellenleiter wird das Netzwerk in kleine infinitesimale Netzwerke zerlegt, die in Reihe geschaltet sind. Die Zerlegung erfolgt in Richtung der Achse 2 und die Anzahl der Schritte wird mit  $k$  bezeichnet. Eine schematische Darstellung wird in der Abbildung 5.11 gezeigt.

Das Netzwerk ist ein  $\Gamma$ -Netzwerk und demgemäß können die Impedanzen  $\underline{Z}_1$  und  $\underline{Z}_2$  sofort zugeordnet werden und betragen:

$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{k} j\omega L_{ZS}^M, \quad \underline{Z}_2 = \frac{1}{k} \frac{1}{j\omega C_{ZS}^M}. \quad (5.29)$$

Die ortsunabhängige Konstante  $\beta$  wird dann zu:

$$\beta = \sqrt{-\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \frac{1}{\Delta x^2}} = \sqrt{\omega^2 \frac{L_{ZS}^M C_{ZS}^M}{\Delta x^2}} \quad (5.30)$$

und wird in diesem Fall Wellenzahl genannt. Die ortsunabhängige Impedanz  $\underline{Z}_0$  wird bei mechanischen Teilstrukturen Wellenimpedanz genannt und beträgt:

$$\frac{1}{\underline{Z}_0} = \Delta x j\beta \frac{1}{\underline{Z}_1} = \sqrt{\frac{L_{ZS}^M}{C_{ZS}^M}}. \quad (5.31)$$

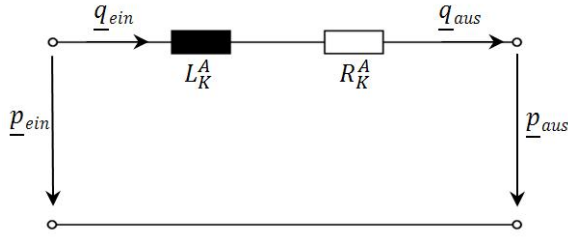
Wie bereits im Kapitel 5.1 dargestellt, ist die Kettenmatrix des Gesamtnetzwerks einer mechanischen Schicht durch:

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_{aus} \\ \underline{F}_{aus} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta l_2 & \underline{Z}_0 \sin \beta l_2 \\ j \frac{1}{\underline{Z}_0} \sin \beta l_2 & \cos \beta l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_{ein} \\ \underline{F}_{ein} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

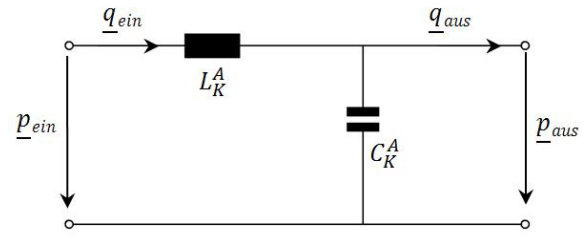
mit den oben aufgeführten Konstanten  $\beta$  und  $\underline{Z}_0$  definiert. Diese lassen sich aus den Bauelementen  $C_{ZS}^M$  und  $L_{ZS}^M$  nach den im Abschnitt 4.18 angegebenen Gleichungen berechnen.

### 5.3.2. Akustische Teilstruktur

Die akustischen Fluidkanäle werden bei der Beschreibung mit konzentrierten Parametern durch die Reihenschaltung gemäß der Abbildung 5.12 dargestellt. Soll die akustische Masse nun berücksichtigt werden, so wird ein zusätzliches Bauelement  $C_K^A$  dazugeschaltet, wodurch ein Netzwerk, wie in der Abbildung 5.13 gezeigt, entsteht. Die Reibung, die durch das Bauelement  $R_K^A$  gegeben ist, wird bei dieser Darstellung erstmal vernachlässigt. Dieses Netzwerk wird anschließend in  $k$  infinitesimale Netzwerke zerlegt. Das entstehende Gesamtnetzwerk ist in der Abbildung 5.14 gezeigt. Hier ist auch wie im Abschnitt 5.1 bereits aufgeführt, die Anzahl der infinitesimalen Netzwerke  $k$  mit der Länge



**Abbildung 5.12.:** Kanalartiger Fluidkanal, abgebildet mit konzentrierten Parametern.



**Abbildung 5.13.:** Kanalartiger Fluidkanal, abgebildet mit verteilten Parametern.

des infinitesimalen physikalischen Elementes  $\Delta x$  durch die Länge  $l_2$  verknüpft.

Die komplexen Impedanzen  $\underline{Z}_1$  und  $\underline{Z}_2$  werden durch:

$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{n} j \omega L_K^A, \quad \underline{Z}_2 = \frac{1}{n} \frac{1}{j \omega C_K^A} \quad (5.33)$$

bestimmt.

Analog zu der Modellabbildung mechanischer Schicht werden die Konstante  $\beta$  und komplexe Impedanz  $\underline{Z}_0$  durch die Gleichungen 5.8 und 5.12 berechnet und betragen:

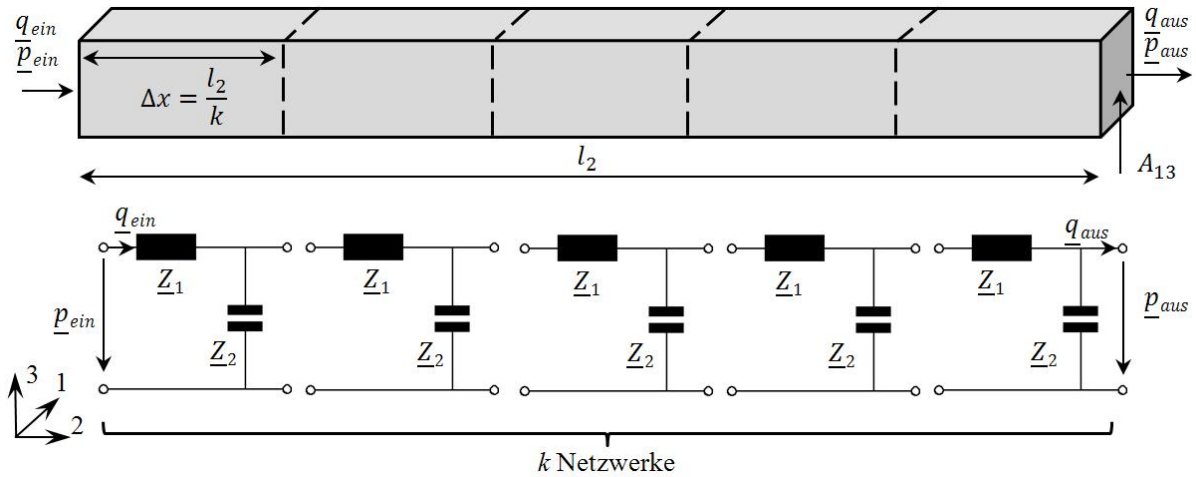
$$\beta = \sqrt{-\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \frac{1}{\Delta x^2}} = \sqrt{\omega^2 \frac{L_K^A C_K^A}{\Delta x^2}}, \quad \frac{1}{\underline{Z}_0} = \Delta x j \beta \frac{1}{\underline{Z}_1} = \sqrt{\omega^2 \frac{C_K^A}{L_K^A}}. \quad (5.34)$$

Infolgedessen findet sich zwischen Eingangs- und Ausgangskordinaten folgender Zusammenhang in der Kettenmatrixform:

$$\begin{bmatrix} \underline{p}_{aus} \\ \underline{q}_{aus} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta l_2 & \underline{Z}_0 \sin \beta l_2 \\ j \frac{1}{\underline{Z}_0} \sin \beta l_2 & \cos \beta l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{p}_{ein} \\ \underline{q}_{ein} \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Da in der aufgeführten Modellabbildung die Reibung im Fluidkanal, die durch das Bauelement  $R_K^A$  gegeben ist, nicht berücksichtigt wurde, kann diese durch anschließende in Reihe-Schaltung des Bauelements  $R_K^A$  abgebildet werden. Die Bauelemente  $R_K^A$ ,  $L_K^A$  und  $C_K^A$  können durch die Gleichungen 4.41, 4.46 und 4.51 aus Modellabbildung mit konzentrierten Parametern bestimmt werden.

Die Modellabbildung volumenartiger Fluidkanäle als eindimensionale Wellenleiter kann



**Abbildung 5.14.:** Zerlegung eines kanalartigen Fluidkanals in  $k$  infinitesimale physikalische Elemente, die durch  $k$  infinitesimale Netzwerke abgebildet werden.

jedenfalls auf die gleiche Weise erreicht werden. Da in Piezo-Inkjetsystemen solche Kanäle nicht vorliegen, wird auf eine genaue Herleitung an dieser Stelle verzichtet.

Die Modellabbildung akustischer kanalartiger Trichter kann wie im Abschnitt 5.1.2 aufgeführt durchgeführt werden. Dabei werden die infinitesimale Impedanzen  $\underline{Z}_1$  und  $\underline{Z}_2$  in den Zusammenhang mit dem abnehmenden Querschnitt des Trichters durch quadratischen Zusammenhänge mit der Länge des physikalischen Elementes  $l_2$  gebracht. Anschließend werden die Konstante  $\beta$  und die Impedanzen  $\underline{Z}_{0,1}$ ,  $\underline{Z}_{0,2}$  berechnet und die Gleichungen 5.26 gelöst.

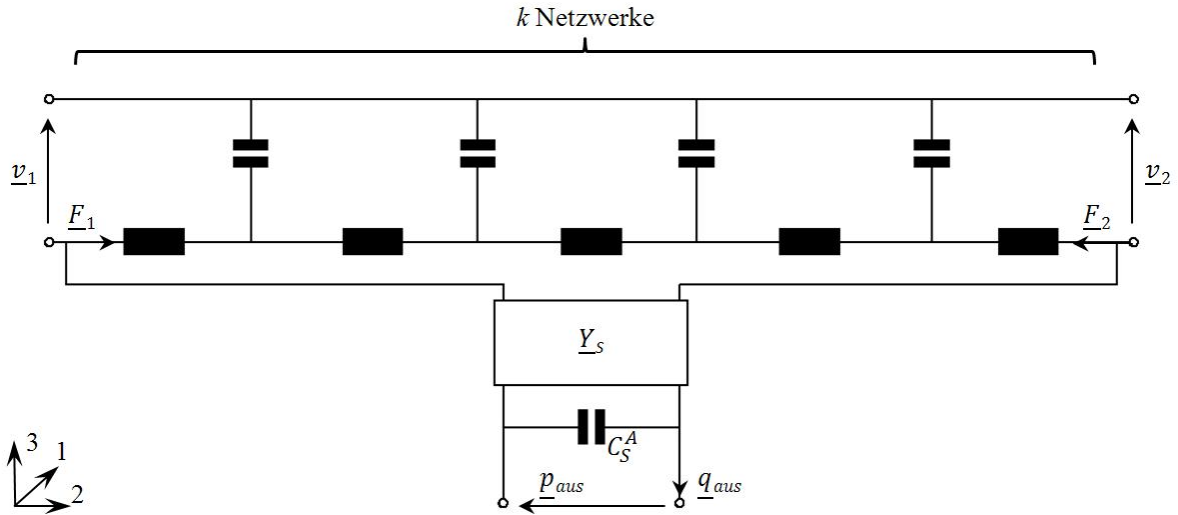
Aufgrund der äußerst komplexen Form der Lösungsgleichungen und einer bereits hergeleiteten Modellabbildung der Trichter mit konzentrierten Parametern im Abschnitt 4.6.4 wird an dieser Stelle auf die genaue Herleitung verzichtet.

### 5.3.3. Mechanisch-akustische Kopplungsstruktur

Die mechanisch-akustische Kopplungsstruktur wird durch die letzte mechanische Schicht vollzogen. Mit konzentrierten Parametern lässt sich diese Kopplung durch einen Gyrator mit Bauelementen  $L_S^M$  und  $C_S^A$ , wie die Abbildung 4.8 auf der Seite 36 zeigt, abbilden.

Da die akustische Masse in der Modellabbildung berücksichtigt wurde, ist der mechanische Teil folglich als eindimensionaler Wellenleiter abgebildet. Eine Darstellung hierzu findet sich in der Abbildung 5.15.

Entsprechend dem mechanischen Wellenleiter werden die Konstante  $\beta$  sowie die Impe-



**Abbildung 5.15.:** Darstellung einer mechanisch-akustischen Kopplungsstruktur durch das Bauelement  $C_S^A$ , einen Gyrator mit gyratorischer Konstante  $Y_S$  und einen Wellenleiter auf der mechanischen Seite.

danz  $\underline{Z}_0$  durch:

$$\beta = \sqrt{-\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \frac{1}{\Delta x^2}} = \sqrt{\omega^2 \frac{L_K^A C_K^A}{\Delta x^2}}, \quad \frac{1}{\underline{Z}_0} = \Delta x j \beta \frac{1}{\underline{Z}_1} = \sqrt{\omega^2 \frac{C_K^A}{L_K^A}} \quad (5.36)$$

gegeben. Die beiden Bauelemente  $L_S^M$ ,  $C_S^M$  sowie die gyratorische Konstante  $Y_S$  können durch die Gleichungen 4.46 und 4.51 aus der Modellabbildung mechanisch-akustischer Kopplungselemente mit konzentrierten Parametern übernommen werden.

Das Netzwerk in der Abbildung 5.15 kann durch folgende Kettenmatrizen:

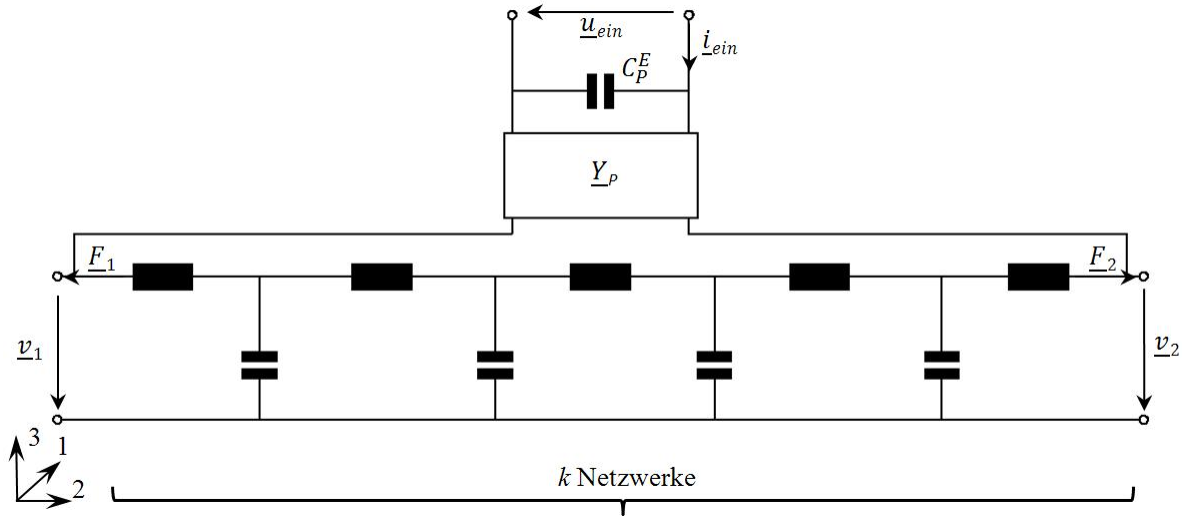
$$\begin{bmatrix} \underline{p}_{aus} \\ \underline{q}_{aus} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_S^A & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Y_S \\ \frac{1}{Y_S} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta l & \underline{Z}_0 \sin \beta l \\ j \frac{1}{\underline{Z}_0} \sin \beta l & \cos \beta l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_{ein} \\ \underline{F}_{ein} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

charakterisiert werden.

### 5.3.4. Elektro-mechanische Kopplungsstruktur

Das Piezoelement kann mit konzentrierten Parametern durch das Netzwerk, wie Abbildung 4.4 auf der Seite 31 zeigt, dargestellt werden.

Die Masse des Piezoelements in der mechanischen Teilstruktur wurde nicht berücksich-



**Abbildung 5.16.:** Darstellung einer elektro-mechanischen Kopplungsstruktur durch das Bauelement  $C_P^E$ , einen Gyrator mit gyratorischer Konstante  $Y_P$  und einen Wellenleiter auf der mechanischen Seite.

tigt und somit wird beim Übergang zu verteilten Parametern die mechanische Seite als ein eindimensionaler Wellenleiter abgebildet. Die dazugehörige Modellabbildung wurde im Abschnitt 5.3.1 vorgestellt, so dass an dieser Stelle nur die relevanten Konstanten definiert werden müssen. Der Übergang zu einem eindimensionalen Wellenleiter auf der mechanischen Seite führt zu einem Netzwerk, wie in der Abbildung 5.16 gezeigt ist. Die Eingangs- und Ausgangskoordinaten können in Kettenmatrixform wie folgt:

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_{aus} \\ \underline{F}_{aus} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta l & \underline{Z}_0 \sin \beta l \\ j \frac{1}{\underline{Z}_0} \sin \beta l & \cos \beta l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Y_P \\ \frac{1}{Y_P} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j \omega C_P^E & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_{ein} \\ \underline{i}_{ein} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

verknüpft werden. Die Konstante  $\beta$  und die komplexe Impedanz  $\underline{Z}_0$  sind durch:

$$\beta = \sqrt{-\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \frac{1}{\Delta x^2}} = \sqrt{\omega^2 \frac{L_P^M C_P^M}{\Delta x^2}}, \quad \frac{1}{\underline{Z}_0} = \Delta x j \beta \frac{1}{\underline{Z}_1} = \sqrt{\frac{L_P^M}{C_P^M}} \quad (5.39)$$

bestimmt. Die Bauelemente  $C_P^E$  und  $L_P^M$  sind durch die Geometrie und die physikalischen Eigenschaften des Piezoelementes gegeben und sind wie bei der Modellabbildung mit konzentrierten Parametern nach den Gleichungen 4.16 bestimmbar.

## 5.4. Schlußfolgerungen

In diesem Kapitel wurden in der Netzwerktheorie bereits bekannte Modellabbildungen physikalischer Elemente der Piezo-Inkjetsysteme mit verteilten Parametern vorgestellt. Um diese anwenden zu können, wurden die Modellabbildungen abstrahiert, so dass eine Übertragung auf verschiedene Ausführungen der physikalischen Elemente anwendbar sind.

Im nächsten Kapitel werden die in diesem und im Kapitel 4 vorgestellten Modellabbildungen auf einen Düsenkanal im Labordrucker übertragen. Dazu wird ein Düsenkanal des am Institut für Druckmaschinen und Druckverfahren vorhandenen Labordruckers wie im Kapitel 4 vorgestellt in physikalische Elemente zerlegt und im Modell abgebildet. Damit die allgemeinen Modellabbildungen übertragen werden können, werden diese auf die physikalischen Elemente des Düsenkanals des Labordruckers spezialisiert und ein Modell wird erstellt. Um die Bauelemente der Netzwerke im erstellten Modell festzulegen, werden im Düsenkanal die Geometrie der physikalischen Elemente in Experimenten bestimmt. Nachdem die Bauelemente berechnet sind, können diese ins Modell eingesetzt und das dynamische Verhalten der physikalischen Struktur bestimmt werden.



---

## 6. Modellierung des Labordruckers

Der am Institut für Druckmaschinen und Druckverfahren vorhandene Labordrucker ist ein Piezo-Inkjetsystem mit auswechselbaren Druckköpfen, wie bereits im Abschnitt 2.3 vorgestellt. In diesem Kapitel wird ein Düsenkanal dieses Labordruckers im Modell abgebildet. Unter der Annahme, dass die anderen physikalischen Elemente die Spannungssignale nicht verarbeiten, sondern nur an das Piezoelement weiterleiten und der Fluidfluss aus dem Fluidbehälter ununterbrochen ist, spielen die Zusammenhänge im Druckkopf und im gesamten Labordrucker keine wesentliche Rolle.

Dazu werden in den Kapiteln 4 und 5 vorgestellte allgemeine Modellabbildungen einzelner physikalischen Elemente für Elemente des Labordruckers spezialisiert. Zum einen werden die Geometrien der physikalischen Elemente wichtig, die hier in einem Experiment bestimmt werden. Zum anderen werden für einige Modellabbildungen die Richtung der wirkenden Kräfte berücksichtigt.

Anschließend wird in diesem Kapitel ein spezielles Modell des Düsenkanals erstellt. Die Bauelemente spezieller Modellabbildungen werden berechnet und anschließend werden akustische und mechanische Netzwerke auf die elektrische Seite transformiert, so dass eine Charakterisierung des Modells erfolgen kann.

### 6.1. Geometrie des Düsenkanals

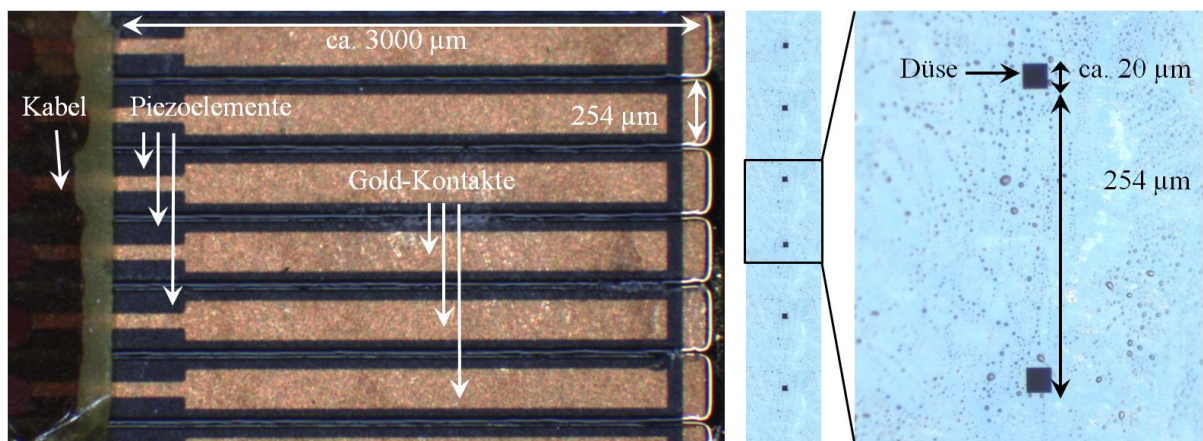
Die Abbildung 6.1 zeigt eine abgebaute Düsenplatte des Druckkopfs. Links ist die Rückseite der Düsenplatte mit den auf dem Siliziumkörper angeklebten Piezoelementen und aufgedampften Kontakten zu sehen.

Die Breite der Piezoelemente beträgt hier  $254\text{ }\mu\text{m}$  und die Länge ca. 3 mm. Rechts in der Abbildung 6.1 ist die Vorderseite der Düsenplatte zu sehen. Die Größe der Düsen ist hier ca.  $21,5 \times 21,5\text{ }\mu\text{m}$  und der Abstand der Düsen voneinander ist durch die Breite des Piezoelementes gegeben und beträgt  $254\text{ }\mu\text{m}$ . Nur diese beiden Abmessungen konnten dem Dimatix-Handbuch entnommen werden [149]. Weitere Abmessungen, wie Geometrie

der einzelnen Fluidkanäle und dessen Form mussten durch weitere Messungen bestimmt werden.

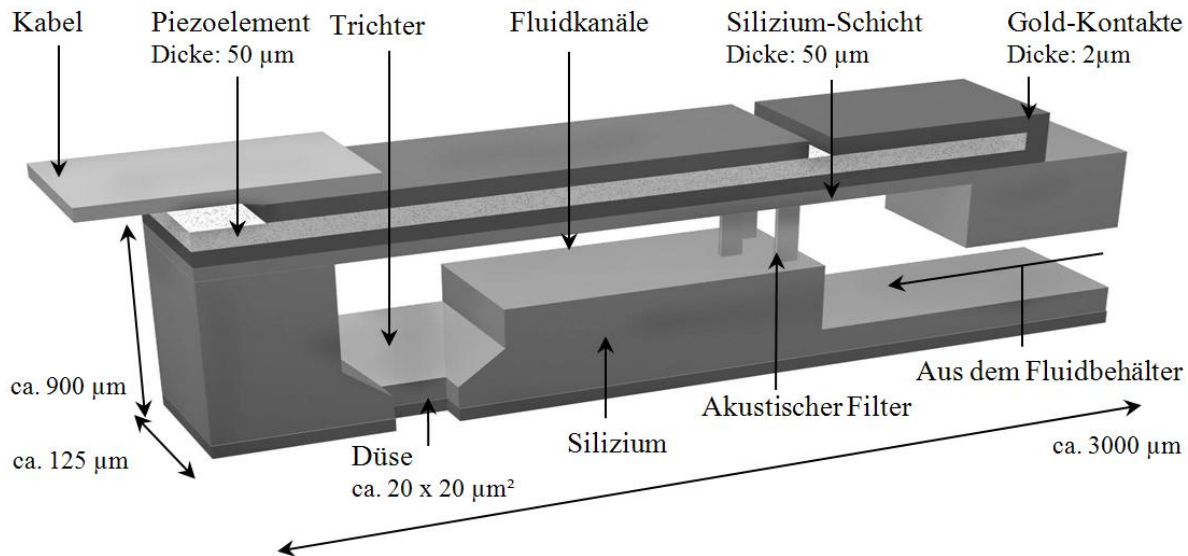
Zur Bestimmung der Geometrie wurde die Düsenplatte von dem Plastikkörper des Druckkopfs DMC-11610 entfernt und in mehreren Richtungen abgeschliffen. Anschließend wurden die Abmessungen der Fluidkanäle und weiteren physikalischen Elementen bestimmt. Dafür wurden unter dem Mikroskop DM4000M der Firma Leica am Institut für Druckmaschinen und Druckverfahren die relevanten Größen vergemessen.

Eine der Herausforderungen bei der Bestimmung der Geometrie der Düsenkanäle bestand darin, die Düsenplatte unter einem Winkel von  $90^\circ$  abzuschleifen. Bereits minimale Winkeldifferenzen können zu starken Abweichungen der Abmessungen bei optischen Untersuchungen führen. Um das zu vermeiden, wurde die Düsenplatte aus mehreren Ebenen aufgenommen und die Änderung der Geometrie aufgrund der Drehung berechnet. Um den Fehler dabei zu reduzieren, wurden mehrere Bilder bei einer 500-fachen Vergrößerung erstellt und die berechneten Werte gemittelt. Die Ungenauigkeit für alle bestimmten Maße beträgt etwa 2 Pixel, was zu einem Fehler von etwa  $0,5 \mu\text{m}$  führt. Im Vergleich zu den Abmessungen des Düsenkanals, die im Bereich  $20\text{-}2000 \mu\text{m}$  liegen, kann dieser Fehler vernachlässigt werden. Zum Teil konnte die Geometrie einiger physikalischen Elemente sowie physikalische Eigenschaften der Materialien bereits der Patentliteratur [150][151][152] entnommen werden.



**Abbildung 6.1.:** Links: Rückseite einer Düsenplatte des hier untersuchten Labordruckers mit mehreren Düsenkanälen. Auf Piezoelemente sind Kontakte aufgedampft. Breite jedes Piezoelementes ist  $254 \mu\text{m}$  und die Länge ca. 3 mm. Rechts: Vorderseite dieser Düsenplatte. Jede Düse ist ca.  $21 \times 21 \mu\text{m}$  groß und der Abstand zwischen den Düsen beträgt  $254 \mu\text{m}$ .

Der Aufbau eines Düsenkanals ist in der Abbildung 6.2 schematisch gezeigt. Die wesentlichen physikalischen Elemente sind hier Kabel, Kontakte, Piezoelement, Silizium-Schicht zwischen Piezoelement und Fluidkanälen, Fluidkanäle selbst und akustischer Trichter.



**Abbildung 6.2.:** Aufbau eines Düsenkanals im DMC-11610 Druckkopf. Die Länge des gesamten Düsenkanals liegt bei ca. 3 mm und die Höhe bei ca. 900  $\mu\text{m}$ . Hier ist zur Veranschaulichung der Düsenkanal in der Mitte durchgeschnitten gezeigt und der Maßstab nicht eingehalten.

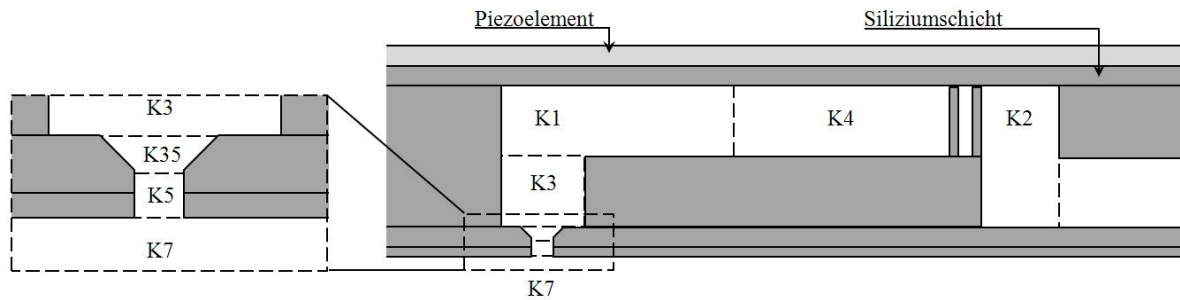
Bei der Bestimmung der Geometrie konnte jedoch eine weitere Herausforderung nicht umgangen werden. Bei der Bestimmung der Dicke der Silizium-Schicht und des Piezoelements im Düsenkanal konnte in optischen Experimenten nur die summierte Dicke der beiden physikalischen Elemente bestimmt werden. Zur weiterer Rechnung wurden diese als gleich dick angenommen. Die Dicke der Schichten konnte auch der Patentliteratur nicht entnommen werden.

Die auf diese Art bestimmte Geometrie der physikalischen Elemente sowie die Eigenschaften der eingesetzten Materialien wurden anschließend zur Berechnung der Bauelemente in den Netzwerken eingesetzt.

## 6.2. Modellbildung

Zur Erstellung des Modells wurden die in den Kapiteln 4 und 5 hergeleiteten Modellabbildungen auf das vorliegende Düsenkanal spezialisiert. Zunächst wurde der Düsenkanal in einzelne physikalische Elemente zerlegt, wie es in der Abbildung 6.3 gezeigt wird.

Die Zuordnung der physikalischen Elemente den einzelnen Teilstrukturen kann wie im Kapitel 3 bereits dargestellt vorgenommen werden. Das Piezoelement stellt hierbei die elektro-mechanische Kopplungsstruktur dar, die Silizium-Schicht die mechanisch-akustische Kopplungsstruktur und die Fluidkanäle die akustische Teilstruktur dar. Zusätzlich



**Abbildung 6.3.:** Wesentliche physikalische Elemente des Düsenkanals. Die Bezeichnung der Fluidkanäle mit K1, K2, K3, K4, K5 und K7 sowie des Trichters mit K35 wurde an dieser Stelle zur Vereinfachung der weiteren Darstellung vorgenommen.

wird auch der mit Luft gefüllte Fluidkanal K7 beschrieben, da die Bildung des Tropfens und Bewegung des Fluids bei Verbreitung des Drucks in Fluidkanälen auch in der Luft, also im Fluidkanal K7 stattfindet.

An dieser Stelle werden die Kabel wegen ihrer unklaren Abmessungen nicht beachtet. Die Schichten der Top- und Bottom-Kontakte werden ebenfalls nicht berücksichtigt, da im Vergleich zu anderen Schichten diese nur minimal zu der Gesamtmasse und -nachgiebigkeit der mechanischen physikalischen Elemente beitragen. Zum Vergleich beträgt die Dicke der Silizium-Schicht  $50\text{ }\mu\text{m}$  und die Dicke der aufgedampften Kontakt-Schicht nur wenige Mikrometer, wie in der Abbildung 6.2 gezeigt. Die Vernachlässigung der Kontakte und Kabeln im Düsenkanal führt an dieser Stelle zu einem kleinerem Widerstand im Modell als in der Realität. Jedoch um die Einfachheit des Modells zu behalten, wird das in Kauf genommen.

Zur Berechnung der Bauelemente wird weiterhin angenommen, dass alle Fluidkanäle mit Wasser gefüllt sind. Im Vergleich zu den normalerweise eingesetzten Fluiden sind die Unterschiede in Viskosität und Oberflächenspannung nicht von Bedeutung. Die Wahl ist im Wesentlichen dadurch festgelegt, dass die physikalischen Eigenschaften von Wasser sehr gut bestimmt und beschrieben sind. Die einzige Ausnahme stellt an dieser Stelle der Fluidkanal K7 dar, der mit Luft gefüllt ist.

### 6.2.1. Annahmen

Bevor eine Modellierung des Düsenkanals vorgenommen wird, soll die Annahme konzentrierter und verteilter Parameter überprüft werden. In dem modellierten Düsenkanal sind mehrere Materialien vertreten, in denen eine Verteilung der Masse vorkommen kann.

Um das zu überprüfen, werden die Grenzfrequenzen  $\omega_g$  für die einzelnen Materialien des Düsenkanals, wie bereits im Kapitel 3 diskutiert, bestimmt. Die wesentlichen Mate-

materialien sind Silizium, PZT-Keramik und Wasser. Zur Berechnung der Grenzfrequenz  $\omega_g$  wurde jeweils die längste Abmessung des physikalischen Elementes, die im Experiment aus Abschnitt 6.1 bestimmt wurde, herangezogen und die Grenzfrequenzen nach der Gleichung 3.1 berechnet. Wie in Tabelle 6.1 gezeigt, liegen die Grenzfrequenzen  $\omega_g$  für alle

Element	Material	$v_s$ [m/s]	$l_{max}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\omega_g$ [1/s]
Silizium-Schicht	Silizium	2.200 [153]	2040	$6,7 \cdot 10^6$
Piezoelement	PZT-Keramik	5000 [154]	2040	$15,1 \cdot 10^6$
K1 und K4	Wasser	1484 [155]	1020	$9,1 \cdot 10^6$

**Tabelle 6.1.:** Berechnung der Grenzfrequenzen  $\omega_g$  für im modellierten Düsenkanal vorhandenen Materialien und Geometrien der physikalischen Elemente.

relevanten physikalischen Elemente über  $5 \cdot 10^6$  1/s und weit über die im Labordrucker auftretenden maximalen Frequenzen von  $20 \cdot 10^3$  1/s. Somit werden die Grenzfrequenzen  $\omega_g$  nicht überschritten und in dieser Arbeit wird der Düsenkanal des Labordruckers mit konzentrierten Parametern modelliert.

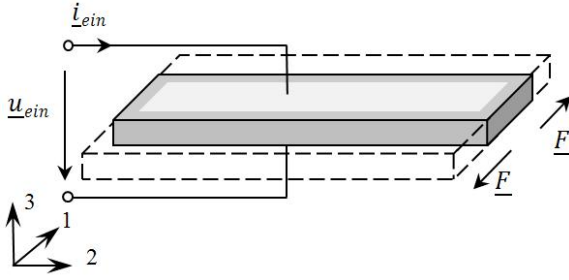
### 6.2.2. Elektro-mechanische Kopplungsstruktur

Die elektro-mechanische Kopplungsstruktur ist durch das Piezoelement gegeben. Wie im Kapitel 4 hergeleitet, kann das Piezoelement als ein elektro-mechanischer Gyrator mit zusätzlichen Bauelementen beschrieben werden, siehe dazu die Abbildung 4.4 auf Seite 31. Im Düsenkanal des Labordruckers liegt ein eingeklemmter Längsschwinger vor, der sich in der Wirkung der Kräfte von dem freien Längsschwinger aus der Abbildung 4.5 auf der Seite 31 unterscheidet. Die wirkenden Kräfte und die Geometrien sind für diesen Fall in den Abbildungen 6.4 und 6.5 gezeigt.

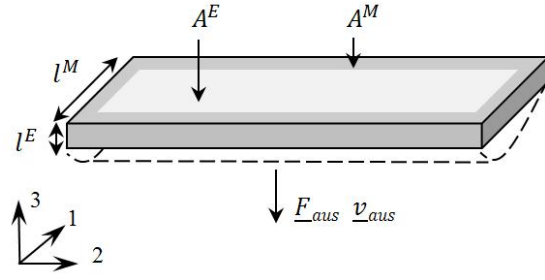
Obwohl die Dehnung des Piezoelementes in die Richtung der Achse 1 vorliegt, wirkt aufgrund des eingeklemmten Zustandes des Piezoelementes die Kraft in die Richtung der negativen Achse 3 und die Biegelinie bildet sich in der Achsenebene 1-3. Elektrisch wirksame Fläche  $A^E$  und Länge  $l^E$  sowie mechanisch wirksame Fläche  $A^M$  und Länge  $l^M$  werden dann für den vorliegenden Düsenkanal zu:

$$A^E = A_{12}^E, \quad l^E = l_3^E, \quad A^M = A_{12}^M, \quad l^M = l_1^M. \quad (6.1)$$

Die Fläche der Elektrode  $A^E$  und die Fläche des Piezoelementes  $A^M$  unterscheiden sich geringfügig voneinander, da die Elektrode das Piezoelement nicht komplett überdeckt.



**Abbildung 6.4.:** Eigentliche Verformung des hier modellierten Piezoelements. Die eigentliche Verformung findet in Richtung der Achse 1 statt.



**Abbildung 6.5.:** Die Verformung des Piezoelements aufgrund des eingeklemmten Zustands. Die Biegelinie bildet sich in der Achsenebene 1-3.

Dazu siehe die Abbildung 6.1 auf der Seite 74.

Aus den Gleichungen 4.16 resultiert für die Bauelemente:

$$Y_P = \frac{1}{e_{31}} \frac{l_3^E}{A_{21}^M}, \quad C_P^E = \epsilon_{33}^S \frac{A_{21}^E}{l_3^E}, \quad L_P^M = -\frac{1}{c_{31}^E} \frac{l_1^M}{A_{21}^M}. \quad (6.2)$$

Zur Berechnung der Bauelemente wurde angenommen, dass das Piezoelement aus einer unmodifizierten PZT-Keramik besteht und entsprechende physikalische Eigenschaften besitzt. Der Grund der Annahme ist, dass die tatsächlichen physikalischen Eigenschaften des modifizierten PZT-Keramik des angebauten Piezoelementes weder bestimmt noch einer Literaturquelle entnommen werden konnten. Die Annahme führt an dieser Stelle zu einem Fehler bei der Bestimmung der Bauelemente und somit zu einem Fehler im Modell, jedoch bleibt das allgemeine Verhalten des Modells erhalten.

	Parameter	Bauelemente	Wert
Piezoelement	$A_{12}^E = 205 \cdot 2030 \text{ } \mu\text{m}^2$ $l_3^E = 50 \text{ } \mu\text{m}$ $A_{12}^M = 205 \cdot 2040 \text{ } \mu\text{m}^2$ $l_1^M = 205 \text{ } \mu\text{m}$ $e_{31} = 46,27 \text{ C/m}^2$ [154] $\epsilon_{33}^S = 8,1419 \text{ F/m}$ [154] $c_{31}^E = -7,5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ [154]	$Y_P = \frac{1}{e_{31}} \frac{l_3^E}{A_{21}^M}$	2,58 m/As
		$C_P^E = \epsilon_{33}^S \frac{A_{21}^E}{l_3^E}$	68 pF
		$L_P^M = -\frac{1}{c_{31}^E} \frac{l_1^M}{A_{21}^M}$	$1,59 \cdot 10^{-6} \text{ m/N}$

**Tabelle 6.2.:** Geometrie und Eigenschaften des Piezoelementes, sowie berechnete gyratorische Konstante  $Y_P$  und Bauelemente  $C_P^M$ ,  $L_P^M$  für in dieser Arbeit modellierten Düsenkanal.

Bei der Berechnung der Bauparameter wurden weiterhin nur die Abmessungen des Piezoelementes über den Kanälen K1 und K4 in Betracht gezogen, da die Verformung des Piezoelementes sich nur hier ereignen kann. Als Befestigung des Piezoelementes dienen der Silizium-Körper auf der einen Seite und der akustische Filter auf der anderen Seite, siehe dazu die Abbildung 6.3.

Mit den im Abschnitt 6.1 bestimmten Abmessungen und physikalischen Eigenschaften der PZT-Keramik können Parameter der Bauelemente festgelegt werden. Diese sind in der Tabelle 6.2 zusammengefasst.

### 6.2.3. Mechanisch-akustische Kopplungsstruktur

Die Silizium-Schicht dient im Düsenkanal des Labordruckers als mechanisch-akustische Kopplungsstruktur und führt die mechanischen Koordinaten  $\underline{F}$  und  $\underline{v}$  in die akustischen Koordinaten  $\underline{q}$  und  $\underline{p}$  über.

Diese Art Kopplungsstrukturen kann durch einen Gyrator mit gyratorischer Konstante  $Y_S$  und die Bauelemente  $L_S^M$  und  $C_S^A$  abgebildet werden, wie in der Abbildung 4.8 auf Seite 36 gezeigt. Wie im Abschnitt 4 bereits erläutert, gelten dann die Gleichungen:

$$Y_S = \frac{f_F^1}{f_F^2}, \quad L_S^M = f_F^1, \quad C_S^A = f_p^2 - \frac{f_p^1}{f_F^1} f_F^2. \quad (6.3)$$

Für die Funktionen  $f_F^1$  bei Kraftbelastung und  $f_p^1$  bei Druckbelastung gelten hier folgende Zusammenhänge:

$$f_F^1 = \frac{1}{2} \frac{l_1^3}{El_2 l_3^3}, \quad f_p^1 = \frac{1}{32} \frac{l_1^4}{El_3^3}. \quad (6.4)$$

Die Verschiebungen  $\xi_F$  und  $\xi_p$  sind durch folgende Gleichungen [141]:

$$\xi_F = \left(2 \frac{x}{l_1}\right)^2 \left(3 - 4 \frac{x}{l_1}\right) \xi_{F0}, \quad \xi_p = \left(1 - \left(2 \frac{x}{l_1}\right)^2\right)^2 \xi_{p0} \quad (6.5)$$

definiert. Die Funktionen  $f_F^2$  und  $f_p^2$  können somit durch Integration der Verschiebungen  $\xi_F$  und  $\xi_p$  über die Gesamtlänge  $l_1$  der Silizium-Schicht berechnet werden.

Für die Funktion  $f_F^2$  gilt dann:

$$\begin{aligned}
 f_F^2 &= \frac{V_F}{F} = \frac{1}{F} \int_{-\frac{l_1}{2}}^{\frac{l_1}{2}} \xi_F dx = \frac{1}{F} \xi_{F_0} \int_{-\frac{l_1}{2}}^{\frac{l_1}{2}} \left(2 \frac{x}{l_1}\right)^2 \left(3 - 4 \frac{x}{l_1}\right) dx \\
 &= \frac{1}{F} f_F^1 F \int_{-\frac{l_1}{2}}^{\frac{l_1}{2}} \left(2 \frac{x}{l_1}\right)^2 \left(3 - 4 \frac{x}{l_1}\right) dx, \\
 &= f_F^1 \int_{-\frac{l_1}{2}}^{\frac{l_1}{2}} \left(2 \frac{x}{l_1}\right)^2 \left(3 - 4 \frac{x}{l_1}\right) dx = f_F^1 \frac{1}{2} l_1 = \frac{1}{4} \frac{l_1^4}{El_2 l_3^3}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

und für die Funktion  $f_p^2$ :

$$\begin{aligned}
 f_p^2 &= \frac{V_p}{p} = \frac{1}{p} \int_{-\frac{l_1}{2}}^{\frac{l_1}{2}} \xi_p dx \\
 &= \frac{1}{p} \xi_{p_0} \int_{-\frac{l_1}{2}}^{\frac{l_1}{2}} \left(1 - \left(2 \frac{x}{l_1}\right)^2\right)^2 dx = \frac{1}{p} f_p^1 p \int_{-\frac{l_1}{2}}^{\frac{l_1}{2}} \left(1 - \left(2 \frac{x}{l_1}\right)^2\right)^2 dx \\
 &= f_p^1 \int_{-\frac{l_1}{2}}^{\frac{l_1}{2}} \left(1 - \left(2 \frac{x}{l_1}\right)^2\right)^2 dx = f_p^1 \frac{8}{15} l_1 = \frac{1}{90} \frac{l_1^5}{El_3^3}.
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Die Bauelemente  $L_S^M$ ,  $C_S^A$  und gyratorische Konstante  $Y_S$  können somit durch:

$$L_S^M = f_F^1 = \frac{1}{16} \frac{l_1^3}{El_2 l_3^3}, \quad C_S^A = f_p^2 - \frac{f_p^1}{f_F^1} f_F^2 = \frac{1}{960} \frac{l_1^5}{El_3^3}, \quad Y_S = \frac{f_F^1}{f_F^2} = \frac{1}{2} l_1 l_2 \tag{6.8}$$

bestimmt werden. Die Eigenschaften der Silizium-Schicht, sowie ihre Geometrie und die berechnete Bauelementen  $L_S^M$  und  $C_S^A$  sowie gyratorische Konstante  $Y_S$  sind in der Tabelle 6.3 auf der Seite 81 aufgeführt.

Hier wurde ebenfalls nur die Schicht über den Kanälen K1 und K4 betrachtet, da die Silizium-Schicht sich nur hier verformen kann, siehe dazu die Abbildung 6.3 auf der Seite 76.

#### 6.2.4. Akustische Teilstruktur: Fluidkanäle

Akustische Teilstruktur ist in dem Düsenkanal des Labordruckers durch die Fluidkanäle, Trichter und akustische Transformatoren gegeben. In diesem Abschnitt werden zuerst



	Parameter	Bauelemente	Wert
Silizium-Schicht	$E = 107 \text{ GPa [147]}$ $l_1 = 205 \text{ } \mu\text{m}$ $l_2 = 2040 \text{ } \mu\text{m}$ $l_3 = 50 \text{ } \mu\text{m}$	$L_S^M = \frac{1}{16} \frac{l_1^3}{El_2 l_3^3}$	$1,92 \cdot 10^{-4} \text{ m/N}$
		$Y_S = \frac{1}{2} l_1 l_2$	$2,39 \cdot 10^{-6} \text{ 1/m}^2$
		$C_S^A = \frac{1}{960} \frac{l_1^5}{El_3^3}$	$5,6 \cdot 10^{-18} \text{ m}^5/\text{N}$

**Tabelle 6.3.:** Geometrie und Eigenschaften der Silizium-Schicht, sowie berechnete gyratorische Konstante  $Y_S$  und die Bauelemente  $C_S^A$  und  $L_S^M$  für in dieser Arbeit modellierten Düsenkanal.

die Fluidkanäle behandelt.

In der akustischen Teilstruktur des Düsenkanals gibt es zwei Arten von Fluidkanälen: die Kanäle K1, K3, K4 und K5 weisen einen kanalartigen und die Kanäle K2 und K7 einen volumenartigen Charakter auf.

In den Kanälen K1, K3, K4 und K5 findet nur eine Bewegung und keine Kompression statt. Hier können die Kanäle durch eine Reihenschaltung eines Bauelementes  $R_{Kn}^A$  zur Beschreibung akustischer Reibung und eines Bauelementes  $L_{Kn}^A$  zur Beschreibung akustischer Masse abgebildet werden. Wie bereits im Kapitel 4 hergeleitet, gilt für die Bauelemente  $R_{Kn}^A$  und  $L_{Kn}^A$ :

$$L_{Kn}^A = \frac{l_2 \rho_0}{A_{31}}, \quad R_{Kn}^A = 12\eta \frac{l_2}{l_1 l_3^3}. \quad (6.9)$$

Die berechneten Bauelemente der mit Wasser gefüllten Fluidkanäle K1, K3, K4 und K5 sind in der Tabelle 6.4 aufgeführt.

Die Fluidkanäle K2 und K7 werden dagegen als Bauelemente  $C_{K2}^A$  und  $C_{K7}^A$ , die akustische Nachgiebigkeiten wiedergeben, dargestellt. Diese Annahme wird dadurch gerechtfertigt, dass sich hinter dem Fluidkanal K2 eine große Fluidmenge befindet, die von dem Gesamtaufbau durch einen akustischen Filter entkoppelt ist, siehe dazu die Abbildung 6.3 auf der Seite 76. Der Fluidkanal K7 ist mit Luft gefüllt und stellt auch eine Nachgiebigkeit dar.

	Parameter	Bauelemente	Wert
K 1	$l_1 = 205 \mu\text{m}$ $l_2 = 1020 \mu\text{m}$ $l_3 = 50 \mu\text{m}$ $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ [155] $\eta = 0,89 \text{ mPas}$ [155]	$R_{K1}^A = 12\eta \frac{l_2}{l_1 l_3^3}$	$1,2 \cdot 10^9 \text{ Ns/m}^5$
		$L_{K1}^A = \frac{l_2 \rho_0}{A_{31}}$	$14 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^4$
K 3	$l_1 = 205 \mu\text{m}$ $l_2 = 270 \mu\text{m}$ $l_3 = 140 \mu\text{m}$ $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ [155] $\eta = 0,89 \text{ mPas}$ [155]	$R_{K3}^A = 12\eta \frac{l_2}{l_1 l_3^3}$	$5,12 \cdot 10^9 \text{ Ns/m}^5$
		$L_{K3}^A = \frac{l_2 \rho_0}{A_{31}}$	$9,4 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^4$
K 4	$l_1 = 205 \mu\text{m}$ $l_2 = 1020 \mu\text{m}$ $l_3 = 350 \mu\text{m}$ $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ [155] $\eta = 0,89 \text{ mPas}$ [155]	$R_{K4}^A = 12\eta \frac{l_2}{l_1 l_3^3}$	$1,2 \cdot 10^9 \text{ Ns/m}^5$
		$L_{K4}^A = \frac{l_2 \rho_0}{A_{31}}$	$14 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^4$
K 5	$l_1 = 50 \mu\text{m}$ $l_2 = 21,5 \mu\text{m}$ $l_3 = 21,5 \mu\text{m}$ $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ [155] $\eta = 0,89 \text{ mPas}$ [155]	$R_{K5}^A = 12\eta \frac{l_2}{l_1 l_3^3}$	$2,49 \cdot 10^{12} \text{ Ns/m}^5$
		$L_{K5}^A = \frac{l_2 \rho_0}{A_{31}}$	$108 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^4$

**Tabelle 6.4.:** Berechnete Bauelemente  $R^A$  und  $L^A$  für mit Wasser gefüllte kanalartige Fluidkanäle K1, K3, K4 und K5. Zur Vereinfachung der Formelanwendung wurde angenommen, dass das Fluid in Richtung der Achse 2 fließt.

Durch die Ausbreitung des Druckes in den Fluidkanälen K2 und K7 entsteht keine Druckänderung in anderen Fluidkanälen. Diese führt lediglich nur zu einem Druckabfall. Das Bauelement  $C_{K2}^A$  lässt sich durch folgende Gleichung berechnen:

$$C_{K2}^A = \frac{1}{K} l_2 A_{13}. \quad (6.10)$$

Bei dem Fluidkanal K7 sind die Abmessungen nicht bestimmbar, so dass hier eine weitere Annahme getroffen und die Nachgiebigkeit des Fluidkanals K7 frei gewählt wird. Der Wert wird in der Größenordnung weiterer Nachgiebigkeiten im System gesetzt. Diese Annahme führt weiterhin zu einer Änderung des Verhaltens des Düsenkanals im Modell. Wird also eine Verfeinerung des Modells gewünscht, kann die Nachgiebigkeit und somit das Bauelement  $C_{K7}^A$  optimiert werden. Die Parameter der Bauelemente sind in

	Parameter	Bauelemente	Wert
K 2	$l_1 = 205 \mu\text{m}$ $l_2 = 620 \mu\text{m}$ $l_3 = 260 \mu\text{m}$ $K = 2,08 \cdot 10^9 \text{ Pa [155]}$	$C_{K2}^A = \frac{1}{K} l_2 A_{13}$	$1,58 \cdot 10^{-20} \text{ m}^5/\text{N}$
K 7	$K = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa [155]}$	-	frei gewählt

**Tabelle 6.5.:** Berechnete Bauelemente  $C_{K2}^A$  und  $C_{K7}^A$  für volumenartige Fluidkanäle K2 und K7. Zur Vereinfachung der Formelanwendung wurde angenommen, dass das Fluid in Richtung der Achse 2 fließt.

der Tabelle 6.5 aufgeführt. Die Geometrie der Fluidkanäle wurde wie im Abschnitt 6.1 beschrieben bestimmt.

### 6.2.5. Akustische Teilstruktur: Transformatoren

Die einzelnen Fluidkanäle weisen unterschiedliche Querschnitte auf. Aus diesem Grund werden akustische Transformatoren dazwischen geschaltet. Insgesamt werden zwei Transformatoren benötigt: zwischen den Kanälen K1 und K3 sowie zwischen den Kanälen K2 und K4. Für die Konstante  $X_{TR}$  gilt bei einem Fluss in Richtung der Achse 2, wie in der

Abbildung 4.15 auf der Seitel 44 gezeigt:

$$X_{TR} = \frac{A'_{31}}{A_{31}}. \quad (6.11)$$

Der Übergang zwischen den Fluidkanälen K1 und K4 erfordert keinen Transformator, da die Querschnitte dieser Fluidkanäle identisch sind und die transformatorische Konstante  $X_{TR}$  in diesem Fall gleich 1 ist. Die berechneten transformatorischen Konstanten

	Parameter	Bauelemente	Wert
Trafo 13	$l_1 = 350 \text{ } \mu\text{m}$ $l_3 = 205 \text{ } \mu\text{m}$ $l'_1 = 140 \text{ } \mu\text{m}$ $l'_3 = 205 \text{ } \mu\text{m}$	$X_{13} = \frac{l'_1 l'_3}{l_1 l_3}$	0,4
Trafo 24	$l_1 = 205 \text{ } \mu\text{m}$ $l_3 = 350 \text{ } \mu\text{m}$ $l'_1 = 205 \text{ } \mu\text{m}$ $l'_3 = 260 \text{ } \mu\text{m}$	$X_{42} = \frac{l'_1 l'_3}{l_1 l_3}$	0,69

**Tabelle 6.6.:** Transformatorische Konstanten  $X$  für die akustische Transformatoren zwischen den Fluidkanälen K1 und K3 sowie K2 und K4.

für die zwei hier definierten Transformatoren sind in der Tabelle 6.6 aufgeführt. Die geometrischen Abmessungen wurden hier, wie im Abschnitt 6.1 dargestellt, bestimmt.

### 6.2.6. Akustische Teilstruktur: Trichter

Die Modellabbildung des Trichters wurde bereits im Kapitel 4 hergeleitet. Dieser kann durch Reihenschaltung der Bauelemente  $R_{K35}^A$  und  $L_{K35}^A$  und einen anschließenden akustischen Transformator mit transformatorischer Konstante  $X_{K35}$  beschrieben werden.

Für die Bauelemente  $R_{K35}^A$  und  $L_{K35}^A$  gelten die bereits hergeleiteten Gleichungen:

$$R_{K35}^A = 12\eta \frac{l_2}{A_{K3}^2}, \quad L_{K35}^A = \frac{\rho_0}{A_{K3}^2} \sum_{n=1}^k \frac{l_2}{k} (l_{K35,1} - n \frac{l_2}{k})^2. \quad (6.12)$$

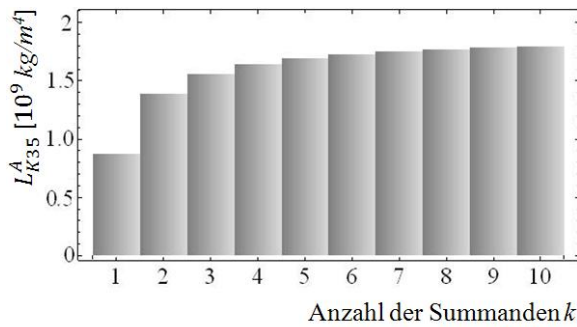
Die transformatorische Konstante  $X_{K35}$  kann wie folgt bestimmt werden:

$$X_{TR} = \frac{A'_{31}}{A_{31}}. \quad (6.13)$$

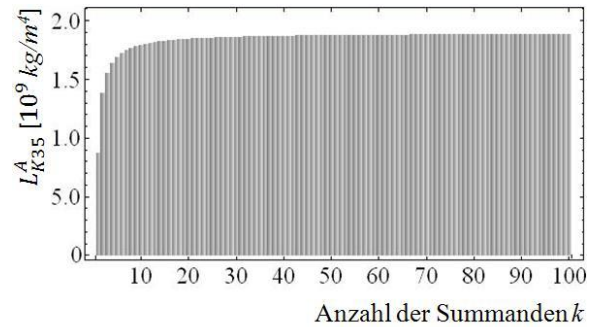
Da das Bauelement  $L_{K35}^A$  sich aus der Summe mehrerer Werte zusammensetzt, wird an

	Parameter	Bauelemente	Wert
K 35	$l_{K35,1} = 71,5 \mu\text{m}$ $l_2 = 50 \mu\text{m}$ $k \rightarrow \infty$ $A_{K3} = 140 \text{ } 250 \mu\text{m}^2$ $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ [155] $\eta = 0,89 \text{ mPas}$ [155]	$R_{K35}^A = \eta \frac{l_2}{A_{K3}^2}$	$0,43 \cdot 10^9 \text{ Ns/m}^5$
		$L_{K35}^A = \frac{\rho_0}{A_{K3}^2} \sum_{n=1}^k \frac{l_2}{k} (l_{K35,1} - n \frac{l_2}{k})^2$	$1,89 \cdot 10^9 \text{ kg/m}^4$
Trafo 35	$l_1 = 140 \mu\text{m}$ $l_3 = 205 \mu\text{m}$ $l'_1 = 21,5 \mu\text{m}$ $l'_3 = 21,5 \mu\text{m}$	$X_{K35} = \frac{l'_1 l'_3}{l_1 l_3}$	0,016

**Tabelle 6.7.:** Berechnete Bauelemente des akustischen Trichters K35 sowie transformatorische Konstante des abschließenden Transformators zwischen Kanälen K3 und K5.



**Abbildung 6.6.:** Die Werte von  $L_{K35}^A$  für die ersten 10  $k$ -Werte in der Summenformel.



**Abbildung 6.7.:** Änderung des Wertes von  $L_{K35}^A$  für die ersten 100 Summanden  $k$ .

dieser Stelle der Konvergenzwert der Summenreihe bestimmt. Das Bauelementes  $L_{K35}^A$  ist in Abhängigkeit von der Anzahl der Summanden  $k$  für die ersten 10  $k$ -Werte in der Abbildung 6.6 und für die 100 ersten  $k$ -Werte in der Abbildung 6.7 gezeigt. Für das Bau-

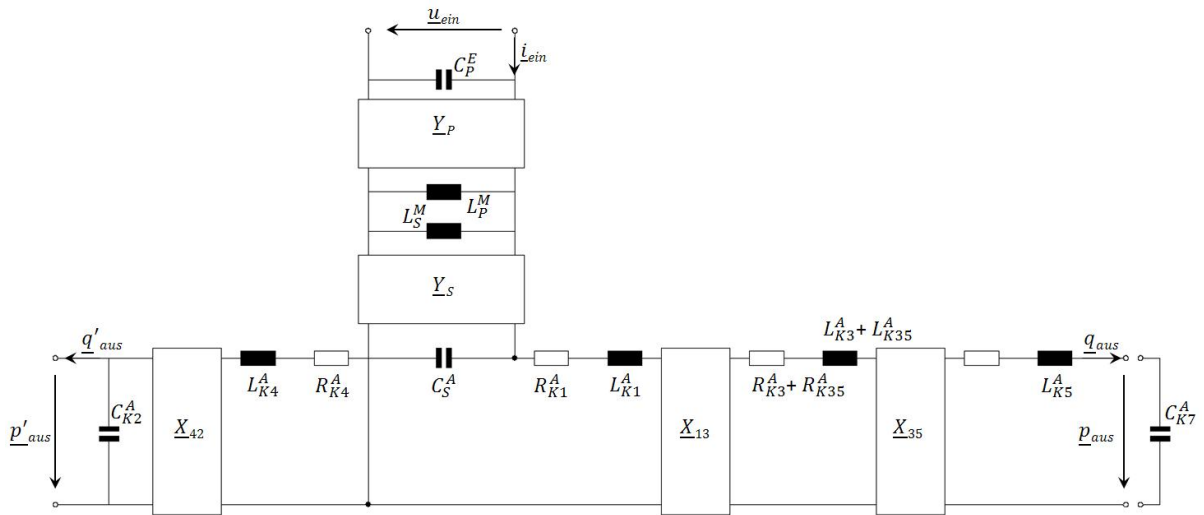
element  $L_{K35}^A$  wurde für die weiteren Rechnungen der Konvergenzwert der Summenreihe für  $k \rightarrow \infty$  genommen.

Die Bauelemente  $R_{K35}^A$  und  $L_{K35}^A$  sowie die transformatorische Konstante  $X_{K35}$  sind in der Tabelle 6.7 aufgeführt. Hier ist für das Bauelement  $L_{K35}^A$  bereits der berechnete Konvergenzwert der Summenreihe aus der Abbildung 6.7 eingesetzt.

Die Geometrie der Fluidkanäle K3 und K5, sowie des Trichters K35 wurden wie im Abschnitt 6.1 beschrieben bestimmt. Die angegebenen Werte gelten für mit Wasser gefüllte Fluidkanäle.

### 6.3. Gesamtmodell des Düsenkanals

Wird das Modell der gesamten physikalischen Struktur des Düsenkanals betrachtet, so besteht dieses aus mehreren Netzwerken, die in Reihe geschaltet sind. Jedes Netzwerk kann wie im Kapitel 4 dargestellt, in der Kettenmatrixform charakterisiert werden.



**Abbildung 6.8.:** Das Gesamtmodell des Düsenkanals, bestehend aus mehreren in Reihe geschalteten Netzwerken, die einzelnen physikalischen Elemente des Düsenkanals im Modell abbilden.

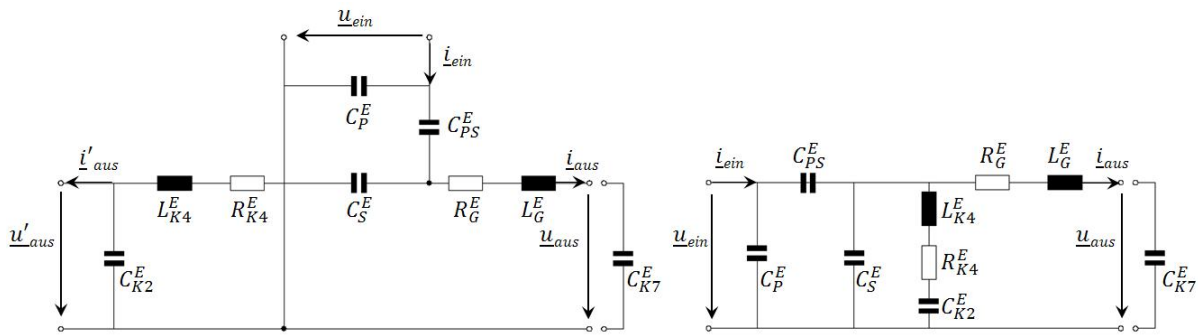
Das Gesamtmodell hat die Form wie in der Abbildung 6.8 gezeigt. Das Gesamtmodell kann durch die Transformation einzelner Bauelemente oder Netzwerke auf die elektrische Seite, wie im Kapitel 4 bereits vorgestellt, vereinfacht werden.

In der Abbildung 6.9 ist das Modell nach der Vereinfachung der transformatorischen und gyratorischen Verknüpfungen, wie diese im Abschnitt 4.7.1 und 4.7.2 vorgestellt wurden, gezeigt. Die vereinfachte Darstellung des in der Abbildung 6.9 abgebildeten Modells in

der Kettenmatrixform wird dann zu:

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_{aus} \\ \underline{i}_{aus} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_P^E & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{j\omega C_{PS}^E} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_S^E & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_{K4}^E + j\omega L_{K4}^E + \frac{1}{j\omega C_{K2}^E}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_G^E + j\omega L_G^E + \frac{1}{j\omega C_{K7}^E}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_{ein} \\ \underline{i}_{ein} \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Um die Einfachheit der Darstellung zu leisten, wurden hier neue Bauelemente definiert. Diese setzen sich aus gyratorisch und transformatorisch auf die elektrische Seite transformierten akustischen, mechanischen und elektrischen Bauelementen.



**Abbildung 6.9.:** Das Modell nach Vereinfachung der transformatorischen und gyratorischen Transformation auf die elektrische Seite. Rechts ist eine weitere Vereinfachung gezeigt.

Die abgebildeten Bauelemente  $R_G^E$  und  $L_G^E$  sind als Summe auf die elektrische Seite transformierter akustischer Bauelemente definiert:

$$R_G^E = R_{K1}^E + R_{K3}^E + R_{K35}^E + R_{K5}^E, \quad L_G^E = L_{K1}^E + L_{K3}^E + L_{K35}^E + L_{K5}^E. \quad (6.15)$$

Die akustischen Bauelemente  $R_{K1}^E$ ,  $R_{K3}^E$ ,  $R_{K35}^E$  und  $R_{K4}^E$  werden durch die gyratorischen und transformatorischen Verknüpfungen bestimmt:

$$\begin{aligned} R_{K1}^E &= \frac{Y_P^2}{Y_S^2} R_{K1}^A, & R_{K35}^E &= \frac{Y_P^2}{Y_S^2} X_{13}^2 R_{K35}^A, \\ R_{K3}^E &= \frac{Y_P^2}{Y_S^2} X_{13}^2 R_{K3}^A, & R_{K5}^E &= \frac{Y_P^2}{Y_S^2} X_{35}^2 X_{13}^2 R_{K5}^A. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Das berechnete Bauelement  $R_G^E$  ist in der Tabelle 6.8 aufgeführt.

Bauelement	Wert	Transformation	Wert
$R_{K1}^A$ $R_{K3}^A$ $R_{K5}^A$ $R_{K35}^A$	$1,2 \cdot 10^9 \text{ Ns/m}^5$ $5,12 \cdot 10^9 \text{ Ns/m}^5$ $2,49 \cdot 10^{12} \text{ Ns/m}^5$ $0,43 \cdot 10^9 \text{ Ns/m}^5$	$R_G^E = \frac{Y_P^2}{Y_S^2} R_{K1}^A + \frac{Y_P^2}{Y_S^2} X_{13}^2 R_{K3}^A$ $+ \frac{Y_P^2}{Y_S^2} X_{13}^2 R_{K35}^A + \frac{Y_P^2}{Y_S^2} X_{35}^2 X_{13}^2 R_{K5}^A$	$R_G^E = 2,34 \text{ m}\Omega$

**Tabelle 6.8.:** Aus auf die elektrische Seite transformierte Bauelemente  $R_{K1}^E$ ,  $R_{K3}^E$ ,  $R_{K35}^E$  und  $R_{K4}^E$  berechnetes Bauelement  $R_G^E$ .

Die Bauelemente  $L_{K1}^E$ ,  $L_{K3}^E$ ,  $L_{K35}^E$  und  $L_{K5}^E$  sind dementsprechend durch:

$$\begin{aligned}
 L_{K1}^E &= \frac{Y_P^2}{Y_S^2} L_{K1}^A, & L_{K35}^E &= \frac{Y_P^2}{Y_S^2} X_{13}^2 L_{K35}^A, \\
 L_{K3}^E &= \frac{Y_P^2}{Y_S^2} X_{13}^2 L_{K3}^A, & L_{K5}^E &= \frac{Y_P^2}{Y_S^2} X_{35}^2 X_{13}^2 L_{K5}^A
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

definiert. Das Bauelement  $L_G^E$  setzt sich dann wie in der Gleichung 6.15 aus Summe dieser Bauelementen zusammen. Die Tabelle 6.9 zeigt den Wert dieses Bauelementes.

Die elektrische Gesamtimpedanz, die durch das Bauelement  $L_G^E$  gegeben ist, und der Gesamtwiderstand, der durch Bauelement  $R_G^E$  gegeben ist, werden somit durch transformatorische Verknüpfungen der akustischen Bauelemente und die anschließende gyratorische Transformation auf die elektrische Seite gegeben.

Bauelement	Wert	Transformation	Wert
$L_{K1}^A$ $L_{K3}^A$ $L_{K5}^A$ $L_{K35}^A$	$1,2 \cdot 10^9 \text{ kg/m}^4$ $5,12 \cdot 10^9 \text{ kg/m}^4$ $2,49 \cdot 10^{12} \text{ kg/m}^4$ $1,89 \cdot 10^9 \text{ kg/m}^4$	$L_G^E = \frac{Y_P^2}{Y_S^2} L_{K1}^A + \frac{Y_P^2}{Y_S^2} X_{13}^2 L_{K3}^A$ $+ \frac{Y_P^2}{Y_S^2} X_{13}^2 L_{K35}^A + \frac{Y_P^2}{Y_S^2} X_{35}^2 X_{13}^2 L_{K5}^A$	$L_G^E = 277 \text{ }\mu\text{H}$

**Tabelle 6.9.:** Aus auf die elektrische Seite transformierten Bauelemente  $L_{K1}^E$ ,  $L_{K3}^E$ ,  $L_{K35}^E$  und  $L_{K5}^E$  berechnetes Bauelement  $L_G^E$ .



Bauelement	Wert	Transformation	Wert
$C_{K2}^A$	$1,58 \cdot 10^{-20} \text{ m}^5/\text{N}$	$C_{K2}^E = \frac{Y_P^2}{Y_S^2} Y_{24}^2 C_{K2}^A$	$C_{K2}^E = 6,42 \text{ nF}$
$R_{K4}^A$	$1,2 \cdot 10^9 \text{ Ns/m}^5$	$R_{K4}^E = \frac{Y_P^2}{Y_S^2} R_{K4}^A$	$R_{K4}^E = 1,39 \text{ m}\Omega$
$L_{K4}^A$	$14 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^4$	$L_{K4}^E = \frac{Y_P^2}{Y_S^2} L_{K4}^A$	$L_{K4}^E = 16,45 \text{ }\mu\text{H}$
$C_{K7}^A$	frei gewählt	-	$C_{K7}^E = 1 \text{ }\mu\text{F}$

**Tabelle 6.10.:** Aus den akustischen Bauelementen berechnete Bauelemente  $C_{K2}^E$ ,  $R_{K4}^E$  und  $L_{K4}^E$ . Das Bauelement  $C_{K7}^A$  wurde frei gewählt.

Bauelement	Wert	Transformation	Wert
$C_P^E$	68 pF	-	$C_P^E = 68 \text{ pF}$
$\frac{L_P^M}{L_S^M}$	$1,59 \cdot 10^{-6} \text{ m/N}$ $1,92 \cdot 10^{-4} \text{ m/N}$	$C_{PS}^E = \frac{1}{Y_P^2} \frac{L_S^M L_P^M}{L_S^M + L_P^M}$	$C_{PS}^E = 238 \text{ pF}$
$C_S^A$	$5,6 \cdot 10^{-18} \text{ m}^5/\text{N}$	$C_S^E = \frac{Y_P^2}{Y_S^2} C_S^A$	$C_S^E = 484 \text{ nF}$

**Tabelle 6.11.:** Die Bauelemente  $C_{PS}^E$  und  $C_S^E$ , die aus elektrischen, mechanischen und akustischen Bauelementen resultieren.

Das Bauelement  $C_{K2}^E$  sowie die Bauelemente  $R_{K4}^E$  und  $L_{K4}^E$  berechnen sich aus den entsprechenden akustischen Bauelementen  $C_{K2}^A$  sowie den Bauelementen  $R_{K4}^A$  und  $L_{K4}^A$ :

$$R_{K4}^E = \frac{Y_P^2}{Y_S^2} R_{K4}^A, \quad L_{K4}^E = \frac{Y_P^2}{Y_S^2} L_{K4}^A, \quad C_{K2}^E = \frac{Y_P^2}{Y_S^2} X_{24}^2 C_{K2}^A \quad (6.18)$$

und sind in der Tabelle 6.10 aufgeführt.

Wie bereits bekannt, ist der Fluidkanal K7 mit Luft gefüllt. Da seine Abmessungen unbestimmbar sind, wurde neben dem Wert des Bauelementes  $C_{K7}^A$  auch der Wert des transformierten Bauelementes  $C_{K7}^E$  frei gewählt.

Die Bauelemente  $C_S^E$  und  $C_{PS}^E$  resultieren aus den Bauelementen  $L_S^M$ ,  $L_P^M$  und  $C_S^A$  wie folgt:

$$C_S^E = \frac{Y_P^2}{Y_S^2} C_S^A, \quad C_{PS}^E = \frac{1}{Y_P^2} \frac{L_S^M L_P^M}{L_S^M + L_P^M}. \quad (6.19)$$

Diese sind in der Tabelle 6.11 zusammengefasst. Das Verhalten der auf die elektrische Seite transformierten Modellabbildungen aus der Abbildung 6.9 ist durch die hier berechneten Bauelemente eindeutig bestimmt.

## 6.4. Schlußfolgerungen

In diesem Kapitel wurden allgemeine Modellabbildungen physikalischer Elemente von Piezo-Inkjetsystemen auf einen Düsenkanal des Labordruckers übertragen. Zum einen wurden spezielle Geometrien des Düsenkanals und zum anderen die Wirkung der Kräfte und Aufbau der akustischen Fluidkanäle betrachtet. Die Geometrien des Düsenkanals wurden im Experiment bestimmt und zum Teil Literaturquellen entnommen.

Da die Auswertung der Geometrie optisch vollzogen wurde, waren Fehler bei der Auswertung nicht zu vermeiden. Zum einen wurden abgeschliffene Teile optisch vermessen und unter anderem konnte eine falsche Positionierung unter dem Mikroskop zu einem Fehler führen. Um das zu umgehen, wurde der Abschleifwinkel bestimmt und bei der Berechnung der Geometrie berücksichtigt. Optische Auswertung führte auch zu einem Fehler, der jedoch im Vergleich zu den Abmessungen des Düsenkanals vernachlässigbar klein war.

Weiterhin konnte das genaue Material des Piezoelementes sowie seine Eigenschaften

nicht bestimmt werden. Der Patentliteratur konnte entnommen werden, dass dies eine PZT-Keramik ist. Da sich jedoch die PZT-Keramiken in ihren Eigenschaften unterscheiden, wurde zur weiteren Berechnung angenommen, dass dies eine unmodifizierte PZT-Keramik ist.

Anschließend wurde das Gesamtmodell eines Düsenkanals des Labordruckers erstellt und auf die elektrische Seite zur Vereinfachung der weiteren Charakterisierung transformiert. Die Bauelemente wurden anschließend mit der im Experiment bestimmten Geometrie der physikalischen Elemente des Düsenkanals und mit den Eigenschaften der Materialien berechnet. Auch die auf elektrische Seite transformierten Bauelemente wurden bestimmt. Durch die berechneten Bauelemente ist das dynamische Verhalten des modellierten Düsenkanals eindeutig bestimmbar.

Im nächsten Kapitel wird das für einen Düsenkanal des Labordruckers erstellte Modell charakterisiert und das dynamische Verhalten der modellierten physikalischen Struktur in Abhängigkeit von den Bauelementen studiert. Unter anderem wird der Einfluss und die Auswirkung der bei der Modellbildung gemachten Annahmen auf das dynamische Verhalten des modellierten Düsenkanals untersucht.



---

## 7. Charakterisierung des Modells

In diesem Kapitel wird das für den Düsenkanal des Labordruckers erstellte Modell charakterisiert. Zur Charakterisierung des Modells wird die Übertragungsfunktion bestimmt und das Stabilitätsverhalten des modellierten Düsenkanals beschrieben. Anhand der Übertragungsfunktion kann das dynamische Verhalten des modellierten Düsenkanals analysiert werden. Um den Einfluss der im Kapitel 6 getroffenen Annahmen bei der Spezialisierung der Modellabbildung und Berechnung der Bauelemente zu testen, wird die Änderung des dynamischen Verhaltens in Abhängigkeit von den Bauelementen untersucht.

### 7.1. Dynamisches Verhalten

Nachdem die Modellbildung des Düsenkanals vollendet worden ist, kann das dynamische Verhalten des modellierten Düsenkanals untersucht werden. Hier ist insbesondere die Stabilität und das dynamische Verhalten des modellierten Düsenkanals interessant. Die beiden Charakteristika können aus der Übertragungsfunktion der Modellabbildung des Düsenkanals bestimmt werden.

#### 7.1.1. Übertragungsfunktion

Die Übertragungsfunktion  $\underline{G}(j\omega)$  wird als Quotient der Ausgangs- und Eingangskoordinate definiert [156][138] und ist hier durch den Quotient des Eingangsspannungssignals und des Ausgangsspannungssignals gegeben:

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{u_{aus}}{u_{ein}} \quad (7.1)$$

und kann aus der Darstellung in Kettenmatrixform gewonnen werden.

Das auf die elektrische Seite transformierte Modell wird, wie im Kapitel 6 erfasst, durch

die Kettenmatrizen:

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_{aus} \\ \underline{i}_{aus} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_P^E & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{j\omega C_{PS}^E} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_S^E & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_{K4}^E + j\omega L_{K4}^E + \frac{1}{j\omega C_{K2}^E}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_G^E + j\omega L_G^E + \frac{1}{j\omega C_{K7}^E}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_{ein} \\ \underline{i}_{ein} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

beschrieben. Die Übertragungsfunktion  $\underline{G}(j\omega)$  entspricht in der Kettenmatrix dem Element  $\underline{a}_{11}$  und beträgt nach einer Ausmultiplikation der Kettenmatrizen:

$$\underline{G}(j\omega) = \underline{a}_{11} = 1 + \left( \frac{1}{j\omega C_P^E} + \frac{1}{j\omega C_{PS}^E} \right) \left( j\omega C_S^E + \frac{1}{R_{K4}^E + j\omega L_{K4}^E + \frac{1}{j\omega C_{K2}^E}} + \frac{1}{R_G^E + j\omega L_G^E + \frac{1}{j\omega C_{K7}^E}} \right). \quad (7.3)$$

Die Übertragungsfunktion  $\underline{G}(j\omega)$  kann nach Ausmultiplizieren als Faktor zweier Polynome vierten Grades mit dem Zählerpolynom  $\underline{Z}(j\omega)$  und dem Nennerpolynom  $\underline{N}(j\omega)$  dargestellt werden.

In abstrahierter Polynomform kann die Übertragungsfunktion dann wie folgt dargestellt werden:

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{Z}(j\omega)}{\underline{N}(j\omega)} = \frac{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + a_3(j\omega)^3 + a_4(j\omega)^4}{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + b_3(j\omega)^3 + b_4(j\omega)^4}. \quad (7.4)$$

Die einzelnen Vorfaktoren  $a_n$  des Zählerpolynoms  $\underline{Z}(j\omega)$  und  $b_n$  des Nennerpolynoms  $\underline{N}(j\omega)$  sind hier durch die Bauelemente gegeben und sind im Anhang A.1 und A.2 angegeben.

### 7.1.2. Stabilitätsverhalten

Da die Grade der Nenner- und Zählerpolynome der Übertragungsfunktion aus der Gleichung 7.4 des modellierten Düsenkanals gleich sind, soll die asymptotische Stabilität des modellierten Düsenkanals überprüft werden. Wenn ein System asymptotisch stabil ist, so treten keine Amplituden auf, die unendlich anwachsen können. Um die asymptotische Stabilität zu prüfen, wird das einfache Kriterium zur Bestimmung der asymptotischen

Stabilität aus den Nullstellen des Nennerpolynoms verwendet [157]. Damit der modellierte Düsenkanal asymptotisch stabil ist, muss der Realteil aller komplexen Nullstellen des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion kleiner Null sein. Ein Polynom vierten Grades besitzt vier Nullstellen.

Nach dem Einsetzen der Bauelemente in die Übertragungsfunktion  $\underline{G}(j\omega)$  bekommt das Nennerpolynom die Form:

$$\underline{N}(j\omega) = 1,5 \cdot 10^{14} + 3,6 \cdot 10^5(j\omega) + 2,8 \cdot 10^3(j\omega)^2 + 6,3 \cdot 10^{-8}(j\omega)^3 + 2,9 \cdot 10^{-10}(j\omega)^4. \quad (7.5)$$

Die Nullstellen des Nennerpolynoms  $\underline{N}(j\omega)$  der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(j\omega)$  wurden mit der Software Wolfram Mathematica 8.0 berechnet und betragen:

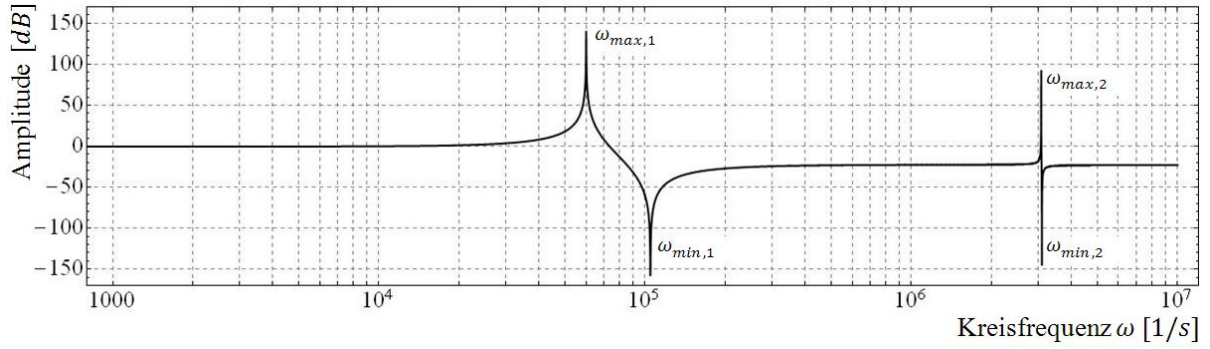
$$\begin{aligned} \omega_1 &= -65 - j \cdot 0,23 \cdot 10^6, & Re[\omega_1] &= -65 < 0, \\ \omega_2 &= -65 + j \cdot 0,23 \cdot 10^6, & Re[\omega_2] &= -65 < 0, \\ \omega_3 &= -42 - j \cdot 3,07 \cdot 10^6, & Re[\omega_3] &= -42 < 0, \\ \omega_4 &= -42 + j \cdot 3,07 \cdot 10^6, & Re[\omega_4] &= -42 < 0. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Alle Realteile der Nullstellen sind kleiner Null und liegen somit links auf der Kreisfrequenzachse, was den modellierten Düsenkanal des Labordruckers als asymptotisch stabil charakterisieren lässt.

### 7.1.3. Übertragungsverhalten

Das dynamische Verhalten des Modells kann in BODE-Diagrammen untersucht werden. Dazu wird der Amplituden- und Phasenverlauf der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(j\omega)$  des modellierten Düsenkanals aus der Gleichung 7.3 untersucht. Die Abbildung 7.1 zeigt den Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion des in dieser Arbeit modellierten Düsenkanals. Hier wurden die Bauelemente, wie im Kapitel 6 in Tabellen 6.8, 6.9, 6.10 und 6.11 berechnet, eingesetzt.

Für kleine Frequenzen und große Frequenzen entspricht das dynamische Verhalten einem Proportionalglied. Dieses Verhalten kann der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(j\omega)$  in Polynomform aus der Gleichung 7.4 entnommen werden. Da der Zähler- und der Nennerpolynom den gleichen Grad besitzen, ist die Übertragungsfunktion  $\underline{G}(j\omega)$  für Frequenzen  $\omega \rightarrow \infty$  gleich dem Quotient den Vorfaktoren der Terme  $(j\omega)^4$  und für Frequenzen  $\omega \rightarrow 0$  gleich



**Abbildung 7.1.:** Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(j\omega)$  des modellierten Düsenkanals. Hier wurden die Bauelemente, wie im Kapitel 6 berechnet, eingesetzt.

dem Quotient den Vorfaktoren nullten Grades des Terms  $j\omega$ :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |\underline{G}(j\omega)| = \frac{a_4}{b_4}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} |\underline{G}(j\omega)| = \frac{a_0}{b_0}. \quad (7.7)$$

Der mittlere Teil der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(j\omega)$  wird durch die Zusammenschaltung aller Bauelemente bestimmt und ist durch die Lage des Maximums und der Minimums bestimmt.

Die Lage des Maximums  $\omega_{max,1}$  und des Minimums  $\omega_{min,1}$  des ersten sowie des Maximums  $\omega_{max,2}$  und des Minimums  $\omega_{min,2}$  des zweiten Peakpaares wurde ebenfalls mit der Software *Wolfram Mathematica* 8.0 bestimmt. Diese betragen:

$$\begin{aligned} \omega_{max,1} &= 60.082 \text{ 1/s}, & \omega_{max,2} &= 3.077.000 \text{ 1/s}, \\ \omega_{min,1} &= 104.738 \text{ 1/s}, & \omega_{min,2} &= 3.097.000 \text{ 1/s}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Diese Werte sind durch die im Kapitel 6 berechneten und in Tabellen 6.8, 6.9, 6.10 und 6.11 Bauelemente gegeben. Der Einfluss einzelner Bauelemente auf das dynamische Verhalten des modellierten Düsenkanals wird im folgenden Abschnitt genauer veranschaulicht.

## 7.2. Bauelementabhängiges dynamisches Verhalten

Um die Abhängigkeit des dynamischen Verhaltens des modellierten Düsenkanals von der Änderung einzelner Bauelemente zu zeigen, werden diese unabhängig von anderen Bauelementen geändert und das dynamische Verhalten für jeden einzelnen Fall charak-



terisiert.

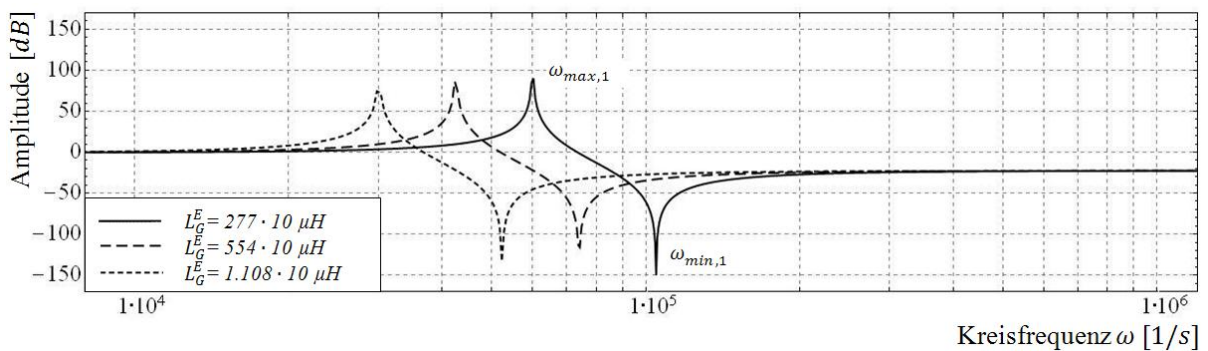
Zum einen gibt es im Modell fluidabhängige Bauelemente, die durch die akustische Teilstruktur vorgegeben sind. Das sind das Bauelement  $L_G^E$ , das die Änderung der Fluidmasse im Düsenkanal beschreibt, und das Bauelement  $R_G^E$ , das die akustische Reibung durch Änderung der Fluidviskosität wiedergibt.

Zum anderen wurden bei der Modellbildung Annahmen getroffen, die auf das dynamische Verhalten einen Einfluss haben. So wurde das Bauelement  $C_{K7}^E$ , das die akustische Nachgiebigkeit der den Düsenkanal umgebenden Luft beschreibt, frei gewählt. Auch das Bauelement  $C_{K2}^E$ , das die Nachgiebigkeit des Fluidbehälters wiedergibt, wurde durch die Nachgiebigkeit nur eines Fluidkanals abgebildet.

Weiterhin konnten im Experiment zur Bestimmung der Geometrie des Piezoelementes und der Silizium-Schicht im Abschnitt 6.1 diese nicht von einander getrennt werden, so dass nur die summierte Dicke dieser physikalischen Elementen bestimmt wurde. Eine weitere Annahme war, dass das Piezoelement aus einer PZT-Keramik besteht. Die Änderung der Eigenschaften des Piezoelementes beeinflusst auch das dynamische Verhalten des modellierten Düsenkanals. Aus diesem Grund wird in diesem Abschnitt der Einfluss der Bauelemente  $C_P^E$  und  $C_{PS}^E$ , die die Eigenschaften und Geometrie des Piezoelementes widerspiegeln, auf das dynamische Verhalten des modellierten Düsenkanals untersucht.

### 7.2.1. Bauelement $L_G^E$

Das Bauelement  $L_G^E$  gibt die Abhängigkeit des dynamischen Verhaltens von der Masse des Fluids im Düsenkanal wieder. In der Abbildung 7.2 ist die Abhängigkeit des Amplitudenverlaufs der Übertragungsfunktion von der Änderung dieses Bauelementes dargestellt.



**Abbildung 7.2.:** Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(j\omega)$  des modellierten Düsenkanals in Abhängigkeit von dem Bauelement  $L_G^E$ , siehe dazu auch die Abbildung 7.1.

Da die Vorfaktoren  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $a_4$  und  $b_4$  nicht von dem Bauelement  $L_G^E$  abhängen, siehe dazu die Gleichung 7.4 auf der Seite 94, bleiben die Werte der Amplitude für Frequenzen  $\omega \rightarrow \infty$

und  $\omega \rightarrow 0$  unverändert. Dagegen ändert sich die Lage des Maximums und des Minimums im mittleren Teil der Übertragungsfunktion. Für größere Werte des Bauelementes  $L_G^E$  verschieben sich der Maximum und der Minimum zu kleineren Kreisfrequenzen.

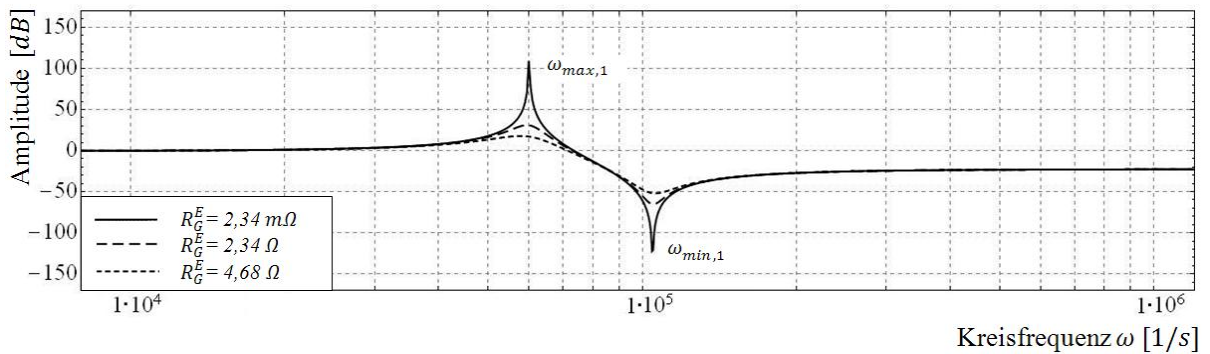
Der Frequenzunterschied zwischen den Extrema  $\omega_{max,1}$  und  $\omega_{min,1}$  bleibt dagegen erhalten und die Form der gesamten Übertragungsfunktion ändert sich nicht.

Diese Änderung des Amplitudenverlaufs der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(j\omega)$  kann physikalisch erklärt werden. Steigt die Masse des Fluids im Düsenkanal, so steigt auch die Trägheit und schnelle Bewegungen im Düsenkanal werden damit verhindert, was die Resonanzfrequenzen zu kleineren Werten verschiebt.

### 7.2.2. Bauelement $R_G^E$

Das Bauelement  $R_G^E$  beschreibt die akustische Reibung im hier modellierten Düsenkanal und hängt mit der Viskosität des Fluids zusammen.

Die Abhängigkeit des Amplitudenverlaufs der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(j\omega)$  des modellierten Düsenkanals von dem Bauelement  $R_G^E$  ist in der Abbildung 7.3 gezeigt.



**Abbildung 7.3.:** Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(j\omega)$  des modellierten Düsenkanals in Abhängigkeit von dem Bauelement  $R_G^E$ , siehe dazu auch die Abbildung 7.1.

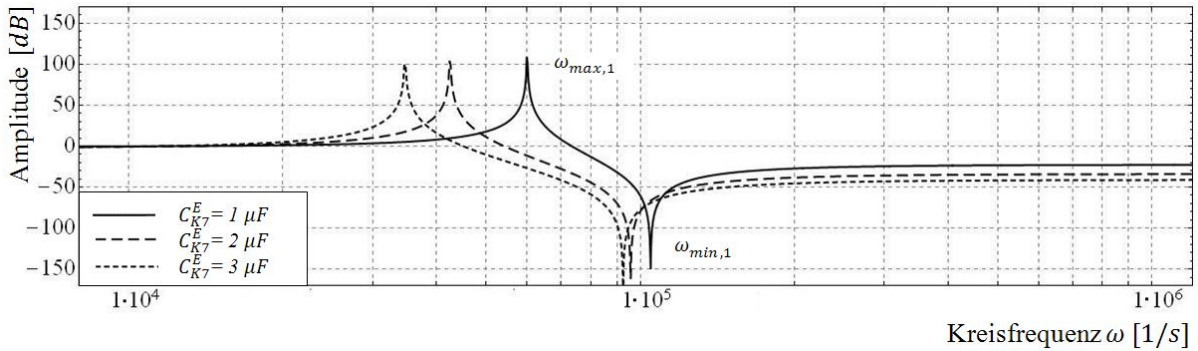
Die Werte von  $R_G^E$  beeinflussen die Ausprägung des Maximums  $\omega_{max,1}$  und des Minimums  $\omega_{min,1}$ . Für höhere Werte von  $R_G^E$  wird die Ausprägung der Peaks schwächer. Die Lage des Maximums und Minimums bleibt dagegen unverändert, sowie der Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion für höhere Frequenzen  $\omega \rightarrow \infty$  und kleine Frequenzen  $\omega \rightarrow 0$ . Dies zeigt, dass die Vorfaktoren  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $a_4$  und  $b_4$  unabhängig von dem Bauelement  $R_G^E$  sind, siehe dazu die Gleichung 7.4 auf der Seite 94.

Physikalisch ist die Änderung der Peaks durch die Reibung im Düsenkanal leicht zu erklären. Steigt die Reibung, so werden die Bewegungen im Düsenkanal stärker gedämpft

und klingen schnell ab. Dadurch wird auch die Stärke der Fluidwellen kleiner und Peaks weniger ausgeprägt.

### 7.2.3. Bauelement $C_{K7}^E$

Da der Wert des Bauelementes  $C_{K7}^E$ , das die Nachgiebigkeit im Fluidkanal K7 beschreibt, frei gewählt wurde, wird hier die Wirkung dieses Bauelementes auf das dynamische Verhalten der Modellabbildung des Düsenkanals untersucht.



**Abbildung 7.4.:** Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(j\omega)$  des modellierten Düsenkanals in Abhängigkeit von Bauelement  $C_{K7}^E$ , siehe dazu auch die Abbildung 7.1.

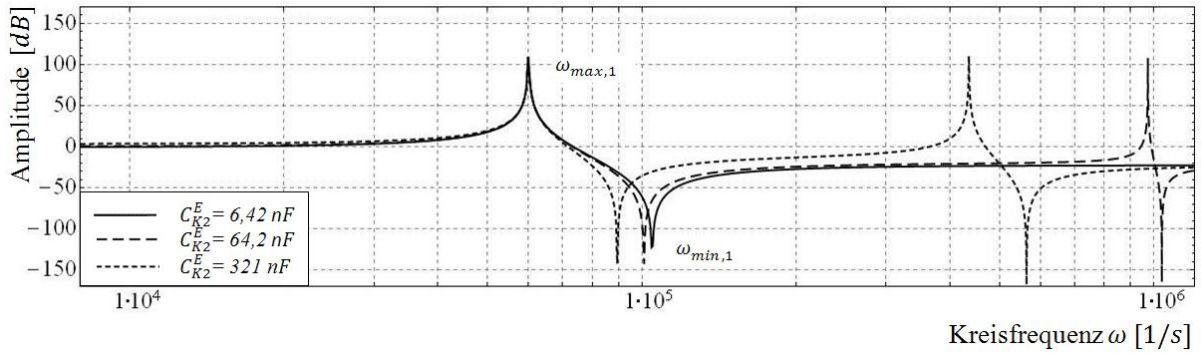
Wie die Abbildung 7.4 zeigt, verschiebt sich die Lage des Maximums  $\omega_{max,1}$  und des Minimums  $\omega_{min,1}$  bei steigendem Wert des Bauelementes  $C_{K7}^E$  zu kleineren Werten. Dabei bleibt der Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion für  $\omega \rightarrow 0$  unverändert. Der Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion ändert sich jedoch für  $\omega \rightarrow \infty$  bei steigenden Werten des Bauelementes  $C_{K7}^E$ , was durch die Abhängigkeit der Vorfaktoren  $a_4$  und  $b_4$  von  $C_{K7}^E$  zu erklären ist, siehe dazu die Gleichung 7.4 auf der Seite 94.

Unabhängig von der angenommenen Nachgiebigkeit im Fluidkanal K7 bleibt der allgemeine Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(j\omega)$  wie im Abschnitt 6.3 vermutet, unverändert. Ist bei einer Charakterisierung die Ermittlung des genauen Amplitudenverlaufs der Übertragungsfunktion wichtig, kann dieser durch Änderung des Bauelementes  $C_{K7}^E$  optimiert werden, siehe dazu den Abschnitt 8.4.2 auf Seite 118.

### 7.2.4. Bauelement $C_{K2}^E$

Die akustische Nachgiebigkeit im Fluidkanal K2 wurde durch das Bauelement  $C_{K2}^E$  modelliert. Eine Änderung des Bauelementes  $C_{K2}^E$  führt zu einer Änderung des Amplitudenverlaufs der Übertragungsfunktion. Dabei ändert sich die Position des Minimums  $\omega_{min,1}$

und der Verlauf bei höheren Frequenzen  $\omega \rightarrow \infty$ . Die Position des Maximums  $\omega_{max,1}$  bleibt dagegen erhalten, sowie der Verlauf der Amplitude bei kleineren Frequenzen  $\omega \rightarrow 0$ .



**Abbildung 7.5.:** Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(j\omega)$  des modellierten Düsenkanals bei Änderung des Bauelementes  $C_{K2}^E$ , siehe dazu auch die Abbildung 7.1.

Der Amplitudenverlauf ist in der Abbildung 7.5 dargestellt. Die Änderung des Bauelementes  $C_{K2}^E$  führt zu einer kleineren Änderung des Amplitudenverlaufs im Vergleich zu Änderung des Bauelementes  $C_{K7}^E$  wie in der Abbildung 7.4 dargestellt.

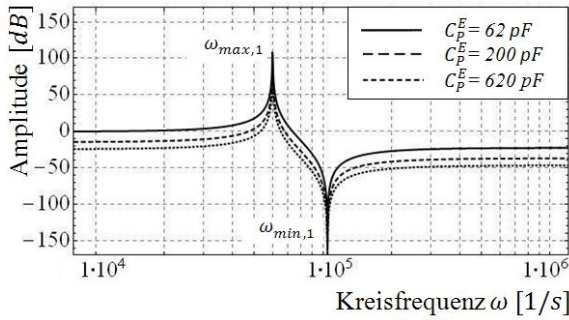
### 7.2.5. Eigenschaften des Piezoelementes

Da das Material des Piezoelementes nicht genau bestimmt werden konnte und angenommen wurde, dass dieses Eigenschaften einer PZT-Keramik besitzt, wird hier der Einfluss der Eigenschaften des Piezoelements auf den Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion des modellierten Düsenkanals untersucht.

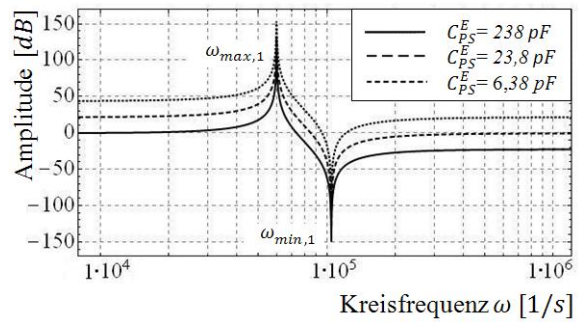
Die Eigenschaften des Piezoelementes werden durch die Bauelemente  $C_P^E$  und  $C_{PS}^E$  gegeben. Dabei beschreibt das zweite Bauelement auch die Silizium-Schicht, da in diesem Bauelement die mechanischen Bauelemente  $L_P^M$  und  $L_S^M$  zusammengefasst sind, siehe dazu die Tabelle 6.11 auf der Seite 89.

Die Abbildung 7.6 zeigt die Änderung des Amplitudenverlaufs der Übertragungsfunktion in Abhängigkeit von dem Bauelement  $C_P^E$ . Für die steigenden Werte von  $C_P^E$  ändert sich die Lage des Maximums und des Minimums nicht. Dagegen ändert sich der Amplitudenverlauf für die Frequenzen  $\omega \rightarrow 0$  und  $\omega \rightarrow \infty$ . Das zeigt die Abhängigkeit der Werte  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $a_4$  und  $b_4$  von dem Bauelement  $C_P^E$ , siehe dazu die Gleichung 7.4 auf der Seite 94.

Die Änderung des Amplitudenverlaufs durch das Bauelement  $C_{PS}^E$  ist schwächer im Vergleich zu Änderung durch das Bauelement  $C_P^E$ . Diese ist in der Abbildung 7.7 gezeigt.



**Abbildung 7.6.:** Amplitudenverlaufs der Übertragungsfunktion in Abhängigkeit von Bauelement  $C_P^E$ , siehe dazu auch die Abbildung 7.1.



**Abbildung 7.7.:** Amplitudenverlaufs der Übertragungsfunktion in Abhängigkeit von Bauelement  $C_{PS}^E$ , siehe dazu auch die Abbildung 7.1.

Wie bei der Änderung des Bauelementes  $C_P^E$  auch ändert sich hier die Lage des Maximums und des Minimums nicht, es wird lediglich der Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion bei Frequenzen  $\omega \rightarrow 0$  und  $\omega \rightarrow \infty$  geändert.

### 7.2.6. Weitere Parameter

Auch die Änderung anderer Parameter, die nicht direkt durch Bauelemente im Modell gegeben sind, ist möglich. So führt zum Beispiel die Änderung der Temperatur im Düsenkanal zu Änderung der Fluidviskosität und Dichte und somit indirekt zu Änderung der Bauelemente  $R_G^E$  und  $L_G^E$ .

Auch die Änderung des Festkörperanteils im Fluid führt zu einer Änderung der Viskosität und Dichte und kann hier an der Änderung der Bauelemente  $R_G^E$  und  $L_G^E$  untersucht werden.

## 7.3. Schlußfolgerungen

In diesem Kapitel wurde die Übertragungsfunktion des modellierten Düsenkanals des Labordruckers bestimmt und die Stabilität und das dynamische Verhalten des modellierten Düsenkanals beschrieben.

Zusätzlich wurde das dynamische Verhalten des modellierten Düsenkanals bauelementabhängig untersucht. Dazu wurde der Einfluss der Bauelemente der akustischen Teilstruktur  $R_G^E$  und  $L_G^E$  auf das dynamische Verhalten des modellierten Düsenkanals untersucht. Es

konnte festgestellt werden, dass diese Bauelemente einen Einfluss auf das dynamische Verhalten haben. Auch weitere Bauelemente wie  $C_{K2}^E$ ,  $C_{K7}^E$ ,  $C_P^E$  und  $C_{PS}^E$  wurden geändert und derer Einfluss auf das dynamische Verhalten diskutiert.

Allgemein änderte sich der Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion und somit das dynamische Verhalten des modellierten Düsenkanals, jedoch blieb die allgemeine Form der Übertragungsfunktion erhalten. Eine weitere Optimierung der Übertragungsfunktion an das reale Verhalten des modellierten Düsenkanals ist also durch die Änderung der Bauelemente möglich.

Das dynamische Verhalten wurde im Bildbereich untersucht, jedoch lässt sich auch der Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsparameter des modellierten Düsenkanals im Zeitbereich abbilden. Durch die Darstellung im Zeitbereich kann der Einfluss der Eingangsparameter  $u$  und  $i$  des Spannungssignals auf den Verlauf der Ausgangsparameter  $p$  und  $q$  direkt untersucht werden.

Im nächsten Kapitel wird das im Kapitel 6 und in diesem Kapitel charakterisierte Modellabbildung im Experiment validiert. Die Validierung erfolgt durch einen Vergleich der im Experiment bestimmten und der hier modellierten Übertragungsfunktion. Dieser Vergleich zeigt die Genauigkeit des Modells und die Richtigkeit der bei der Modellbildung im Kapitel 6 getroffenen Annahmen bei der Berechnung der Bauelemente für den Düsenkanal des Labordruckers.

---

## 8. Experimente und Validierung des Modells

Dieses Kapitel befasst sich mit den am Labordrucker durchgeführten Experimenten, die am Institut für Druckmaschinen und Druckverfahren realisiert wurden. Zum einen wurden optische Experimente zur Bestimmung der Reproduzierbarkeit der Tropfeneigenschaften in einem und mehreren Düsenkanälen durchgeführt. Hier wurden das Volumen und die Geschwindigkeit mehrerer Tropfen untereinander verglichen. Die Schwankungen in diesen Werten erlauben eine Aussage über die Qualität der Düsenkanäle und Fehler, die durch die Geometrie der Düsenkanäle auftreten.

Zum anderen wurden zeitaufgelöste optische Messungen am Labordrucker durchgeführt, um die Tropfenbildung zeitaufgelöst zu beobachten und das Modell zu validieren. Diese Experimente konnten nicht mit einer ausreichend guter Zeitauflösung durchgeführt werden, so dass zur Validierung des erstellten Modells des Düsenkanals elektrische Messungen durchgeführt wurden.

Bei den elektrischen Messungen wurde die Fähigkeit des Piezoelementes zur Rückkopplung eingesetzt und das Piezoelement als Sensor genutzt. Anhand dieser Messungen konnte das für den Düsenkanal erstellte Modell validiert werden.

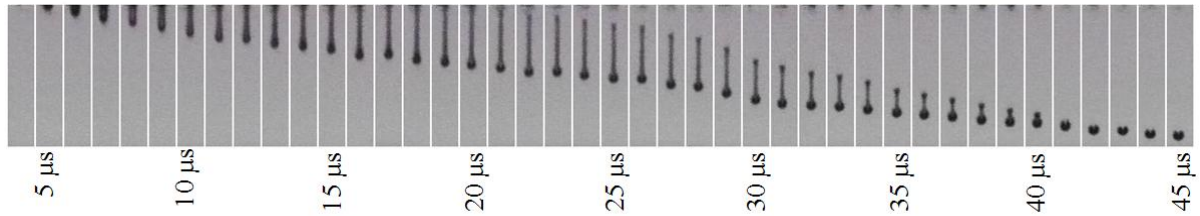
Anschließend wurde die Optimierung des Modells vorgenommen. An die im Experiment bestimmte Amplitude der Übertragungsfunktion wurde durch die Änderung der Bauelemente im Modell die modellierte Amplitude gefittet. Dadurch konnten die Unterschiede im Modell zu der Realität bestimmt werden. Am Ende des Kapitels werden die Ergebnisse aus Experiment und Validierung diskutiert.

### 8.1. Optische Messungen

#### 8.1.1. Aufbau der Experimente

Zur Bestimmung der Reproduzierbarkeit der Tropfenbildung im eingesetzten Druckkopf DMC-11610, wie dieser im Kapitel 6 vorgestellt wurde, wurden mit im Labordrucker eingebauter stroboskopischer CCD-Kamera optische Aufnahmen der Tropfen gemacht.

Um eine stabile Tropfenbildung zu erreichen, wurde ein Gemisch mit 70% Gew. Glycerin und 30% Gew. destilliertes deionisiertes Wasser verwendet. Die Mischung weist eine Viskosität von 17,96 mPas bei 25 °C [155] auf und zeigt ein newtonsches Verhalten.



**Abbildung 8.1.:** Stroboskopisch aufgenommene stabile Tropfenbildung des Glycerin-Wasser-Gemischs an einem Düsenkanal des im Labordrucker eingesetzten Druckkopf DMC-11610. Die nach dem Ankommen des Spannungssignals an das Piezoelement bis zur Aufnahme des Tropfens vergangene Zeit ist im Bild angegeben.

In der Abbildung 8.1 sind die Bilder der Tropfen an einem Düsenkanal zu unterschiedlicher Zeit, die nach dem Anlegen des Spannungssignals an das Piezoelement vergangen ist, gezeigt. Durch die stroboskopische Aufnahme wird hier nicht derselbe Tropfen aufgenommen, sondern unterschiedliche. Die Tropfenbildung kann hier als stabil bezeichnet werden, da zum einen keine Satellitentropfen gebildet werden und die Form des Tropfens rund ist und zum anderen keine Fehler wie diese in der Abbildung 2.3 auf der Seite 7 vorgestellt wurden, auftreten.

Für alle in diesem Abschnitt vorgestellten Experimente wurde ein Spannungssignal in Rechteckform mit einer Spannung von 22 V und einer Dauer von  $3,7 \mu\text{s}$  bei einer Frequenz von 2 kHz eingesetzt.

An den stabilen Tropfen kann nun die Reproduzierbarkeit der Tropfenbildung in einem oder mehreren Düsenkanälen untersucht werden. Die Reproduzierbarkeit ist durch die Schwankungen der Volumina und der Geschwindigkeiten der im Düsenkanal bei denselben Einstellungen gebildeten Tropfen gegeben.

### 8.1.2. Reproduzierbarkeit in einem Düsenkanal

Die Reproduzierbarkeit der Tropfenbildung in einem Düsenkanal zeigt die Schwankungen, die unabhängig von der herstellungstechnischen Variation der geometrischen Parameter in verschiedenen Düsenkanälen auf einer oder mehreren Düsenplatten sind.

Die Tropfen wurden in diesem Experiment nach der vollständigen Bildung aufgenommen. Diese wurde nach dem Erreichen von dem Tropfen einer runden Form nach  $50 \mu\text{s}$ , vergleiche dazu die Abbildung 8.1, definiert. Um eine ausreichende Statistik zu erhalten,

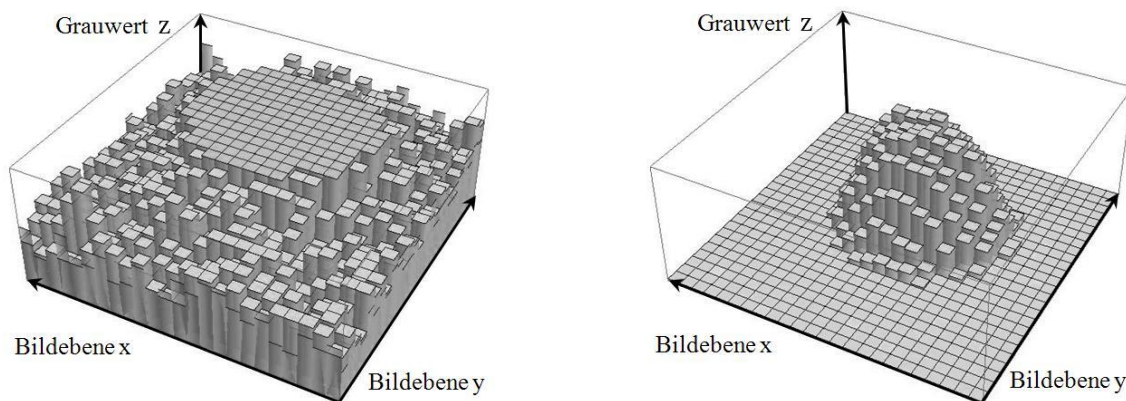


wurden insgesamt 70 Bilder aufgenommen und ausgewertet. Das zeitliche Intervall zwischen den Aufnahmen betrug 1 Sekunde, was bei einer Frequenz von 2 kHz die Aufnahme jedes 2.000 Tropfens impliziert.

Zur Analyse wurde ein Script in Wolfram Mathematica 8.0 implementiert, das, basierend auf den im Experiment aufgenommenen Bildern, Tropfenvolumen und Tropfengeschwindigkeit berechnet. Das Script arbeitet pixelbasiert und wertet die aufgenommenen Graustufenbilder aus. Im Anhang B.1 ist ein Teil des Scriptes aufgeführt.

Zur Umrechnung der Pixelzahl in  $\mu\text{m}$  wurde eine auf einem Glassubstrat gedruckte  $\mu\text{m}$ -Skala, die im Fokus der Kamera positioniert wurde, aufgenommen. Anschließend wurden die Abstände auf der Skala mit den Pixeln in den aufgenommenen Bildern in Zusammenhang gebracht. Die Fläche eines Pixels beträgt  $2,95 \mu\text{m}^2$  mit einem Fehler von  $0,02 \mu\text{m}^2$  oder  $0,7 \%$ .

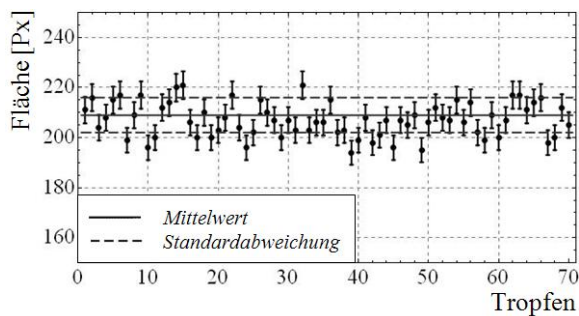
Die Auswertung erfolgte in mehreren Schritten. Zuerst wurde der Hintergrund ausgewertet und der Mittelwert des Grautons gebildet. Daraufhin wurde das Bild auf den Mittelwert justiert, so dass nur die Pixel, die den Tropfen abbilden berücksichtigt werden. Anschließend wurde die vom Tropfen ausgefüllte Fläche berechnet. Abbildung 8.2 zeigt links ein nicht an den Hintergrund angepasstes Bild des Tropfens und rechts ein Bild mit gefiltertem Hintergrund.



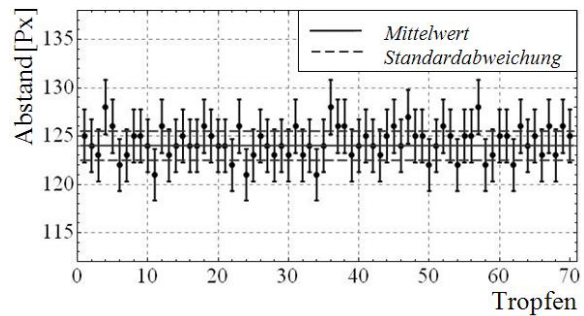
**Abbildung 8.2.:** Links ist ein nicht an Hintergrund und rechts ist ein an den Hintergrund angepasstes Bild des Tropfens gezeigt. Das z-Scala zeigt die Werte des Grautons und x- und y- Scala geben die Position des Pixels im Bild an.

Durch die Anpassung des Hintergrundes entsteht ein Fehler, der bei etwa 5 Pixel liegt und somit etwa  $2,5 \%$  der Gesamtfläche beträgt. Im Anschluss daran wurde die Anzahl der Pixel, deren Grauwert über dem Mittelwert des Hintergrundes liegt, gezählt und die Gesamtfläche des Tropfens im Bild bestimmt. Der Fehler von  $2,5 \%$  korreliert mit einer Fläche von  $14,8 \mu\text{m}^2$ .

Da im Experiment und in der Auswertung nur die Fläche des Tropfens berechnet wird, wird das Volumen des Tropfens mathematisch aus der Fläche des Tropfens im Bild berechnet. Dazu wird aus der berechneten Fläche des Tropfens in der Aufnahme der Durchmesser des Tropfens bestimmt und daraus das Volumen berechnet. Da die Fläche des Tropfens in den Bildern mit einem Fehler von  $14,8 \mu\text{m}^2$  bestimmt wurde, ergibt sich durch Fehlerfortpflanzung ein Fehler im Volumen des Tropfens zu  $1.270 \mu\text{m}^3$  oder  $3,7\%$  des Gesamtvolumens. Dieser Fehler ist auch der Auswertungsfehler des durchgeführten Experimentes.



**Abbildung 8.3.:** Die in der Auswertung berechnete Fläche des Tropfens im Bild für 70 Tropfen in einem Düsenkanal.



**Abbildung 8.4.:** Der berechnete Abstand des Tropfensmittelpunkts nach  $50 \mu\text{m}$  zu der Düse für 70 Tropfen in einem Düsenkanal.

Die Abbildung 8.3 zeigt die im implementierten Script aus Anhang B.1 berechnete Fläche, die im aufgenommenen Bild von einem Tropfen angenommen wird. Der arithmetische Mittelwert beträgt 209 Pixel, was einer Fläche von  $618 \mu\text{m}^2$  entspricht. Die Umrechnung der Fläche des Tropfens im Bild ins Volumen ergibt ein mittleres Tropfenvolumen von  $11.557 \mu\text{m}^3$  oder  $11,5 \text{ pl}$  mit einer Standardabweichung von  $1,1 \text{ pl}$  oder  $9,5 \%$ . Die Standardabweichung und somit die Streuung des Tropfenvolumens in einem Düsenkanal ist im Endeffekt höher als der oben bestimmte Auswertungsfehler von  $3,7\%$ .

In einem weiteren Experiment wurde die Tropfengeschwindigkeit ermittelt. Die Auswertung der aufgenommenen Bildern erfolgte wie oben auch über das in Wolfram Mathematica 8.0 implementierte Script, wie dieses im Anhang B.2 aufgeführt ist. Zur Auswertung wurde der Abstand zwischen Düse und der Tropfenmitte nach  $50 \mu\text{s}$  berechnet.

Da die genaue Zeit des Tropfenaustritts aus der Düse schwierig zu bestimmen ist, siehe dazu die Abbildung 8.1, wurde als Gesamtflugzeit die Zeit angenommen, die nach dem Anlegen des Spannungssignals bis zur vollständigen Tropfenbildung vergeht. Diese Annahme führt zu einem systematischen Fehler bei der Berechnung der mittleren Tropfengeschwindigkeit. Eine weitere Ungenauigkeit entsteht dadurch, dass die Tropfengeschwindigkeit als konstant angenommen wird, was aufgrund der Tropfenbildung

und Meniskusbewegung nicht der Fall ist. Dadurch bleibt die absolute Tropfengeschwindigkeit zwar unbestimmt, die Geschwindigkeit einzelnen Tropfen kann jedoch trotzdem verglichen werden.

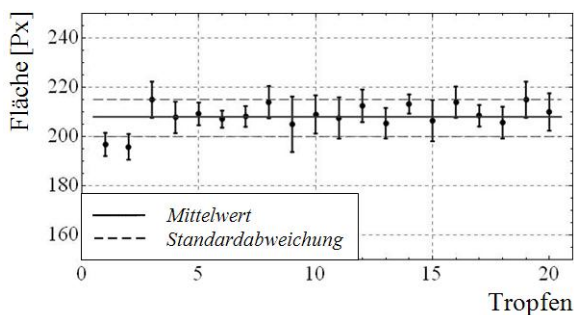
Bei der optischen Auswertung der Bilder und einer Umrechnung der Pixelzahl in  $\mu\text{m}$  entsteht ein Fehler von etwa 3 Pixel, was einem Abstand von  $5,17 \mu\text{m}$  oder 2,2 % des Gesamtabstandes des Tropfens von der Düse entspricht. Dieser Fehler ist der Auswertungsfehler im durchgeführten Experiment. Die Abbildung 8.4 zeigt die berechneten Werte des Abstandes des Tropfens von der Düse nach  $50 \mu\text{s}$  nach dem Ankommen des Spannungssignals an dem Piezoelement.

Der mittlere Abstand von der Düse beträgt hier 124 Pixel und entspricht einer Tropfengeschwindigkeit von 4,2 m/s. Die Standardabweichung des Abstandes beträgt 1,2 Pixel und entspricht 0,04 m/s oder 0,9 %. Dieser Fehler ist kleiner als der Auswertungsfehler, so dass die maximale Abweichung der Tropfengeschwindigkeiten in einer Düse unter 2,2 % liegt.

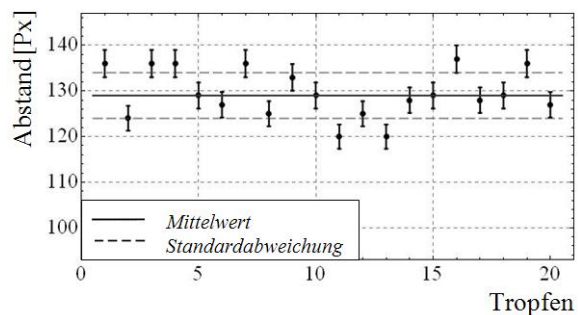
### 8.1.3. Reproduzierbarkeit in mehreren Düsenkanälen

Um die Reproduzierbarkeit der Tropfenbildung in Abhängigkeit von den herstellungstechnischen Unterschieden in Düsenkanälen zu betrachten, wurden die Messungen wie im Abschnitt 8.1.2 beschrieben an 20 verschiedenen Düsenkanälen durchgeführt.

Abbildung 8.5 zeigt die Differenzen in der berechneten Fläche des Tropfens in aufgenommenen Bildern. Der Fehler bei der Bestimmung der Fläche beträgt hier 2,5 %, wie im Abschnitt 8.1.2 berechnet. Der Mittelwert beträgt 208 Pixel, was einer Fläche von  $615 \mu\text{m}^2$  entspricht. Die Standardabweichung beträgt hier 7,1 Pixel und entspricht 3,7%.



**Abbildung 8.5.:** Die in der Auswertung berechnete Fläche des Tropfens im Bild für 20 verschiedene Düsenkanäle.



**Abbildung 8.6.:** Der berechnete Abstand des Tropfensmittelpunkts nach  $50 \mu\text{s}$  zu der Düse für 20 verschiedene Düsenkanäle.

Das aus der Fläche des Tropfens im Bild berechnete Tropfenvolumen beträgt durchschnittlich  $11.472 \mu\text{m}^3$  oder 11,4 pl. Die Standardabweichung des Tropfenvolumens in verschiedenen Düsenkanälen ist somit gleich der Abweichung in einem Düsenkanal und beträgt etwa 9,5 %. Somit ist die Volumenvariation in verschiedenen Düsenkanälen durch die Abweichungen in den einzelnen Düsenkanälen, und nicht durch die herstellungstechnische Änderung der Geometrie von Düsenkanälen, gegeben.

Die Abweichung des Abstandes des Tropfens von der Düse nach  $50 \mu\text{s}$  zur Bestimmung der Tropfengeschwindigkeit in 20 verschiedenen Düsenkanälen ist in der Abbildung 8.6 gezeigt. Bei der Auswertung entsteht ebenfalls ein Fehler von 2,2 %. Der Durchschnitt liegt hier bei 129 Pixel mit einer Standardabweichung von 5,3 Pixel. Das entspricht einer Geschwindigkeit von 4,43 m/s und einer Standardabweichung von 0,18 m/s oder 4,1 %. Dieser Wert liegt deutlich über dem Auswertungsfehler von 2,2 % und ist durch die Variation der Geometrie zwischen den einzelnen Düsenkanälen gegeben.

## 8.2. Zeitaufgelöste optische Messungen

Durch die zeitaufgelösten optischen Messungen kann eine Validierung des im Kapitel 6 erstellten Modells des Düsenkanals geliefert werden. Dazu wird der Druck an der Düse mit dem modellierten Verlauf der Ausgangsspannung in Zusammenhang gebracht.

Um eine direkte Validierung zu leisten, wurde für diese Messungen deionisiertes destilliertes Wasser als Fluid eingesetzt, da auch im Modell die Fluidkanäle für Wasser modelliert wurden.

### 8.2.1. Vorüberlegungen zu den Messungen

In dem in Kapitel 6 erstellten Modell wird der Druck  $p$  in Verbindung mit der Spannung  $u$  und der Strom  $i$  in Verbindung mit dem Fluidfluss  $q$  gebracht. Optische Messungen zur Bestimmung des Fluidflusses  $q$  sowie des Druckes  $p$  an der Düse erscheinen somit am zweckmäßigsten.

Die Kraft  $F_{\text{aus}}$ , die nötig ist, einen Tropfen aus der Düse herauszupressen, hängt mit dem Druck  $p_{\text{aus}}$  über den Querschnitt der Düse  $A_D$  zusammen [143]:

$$F_{\text{aus}}(t) = A_D p_{\text{aus}}(t). \quad (8.1)$$

Die Kraft  $F_S$ , die entgegenwirkt, ist durch die Oberflächenspannung des Fluids  $\sigma$  gegeben und kann wie folgt berechnet werden:

$$F_S(t) = \sigma \frac{V(t)}{S(t)}. \quad (8.2)$$

Dabei bezeichnet  $V(t)$  das aus der Düse ausgepresste Volumen des Fluids und  $S(t)$  die Oberfläche des rausgepressten Fluids. Die beiden Kräfte sind stets im Gleichgewicht und für den Druck  $p_{aus}$  an der Düse gilt:

$$p_{aus}(t) = \frac{\sigma}{A_D} \frac{V(t)}{S(t)}. \quad (8.3)$$

Der Querschnitt der Düse  $A_D$  ist konstant und das Volumen  $V(t)$  und die Oberfläche  $S(t)$  des aus der Düse rausgepressten Fluids können experimentell durch optische Aufnahmen bestimmt werden. Da in Experimenten als Fluide keine Tensidmischungen eingesetzt werden und somit die dynamische Oberflächenspannung gleich der statischen Oberflächenspannung  $\sigma$  ist, wurde diese als konstant angenommen. Zur Validierung des Modells ist lediglich der Verlauf des Druckes  $p_{aus}$  und nicht seine absolute Größe relevant. Die Konstante  $\sigma/A_D$  kann somit bei der Auswertung vernachlässigt und nur die Größe:

$$p_{aus}(t) \propto \frac{V(t)}{S(t)} \quad (8.4)$$

betrachtet werden. Da das Modell den Verlauf der Ausgangsspannung  $u_{aus}$  mit dem Verlauf des Druckes  $p_{aus}$  in Verbindung setzt, kann dadurch eine Validierung des erstellten Modells des Düsenkanals erreicht werden.

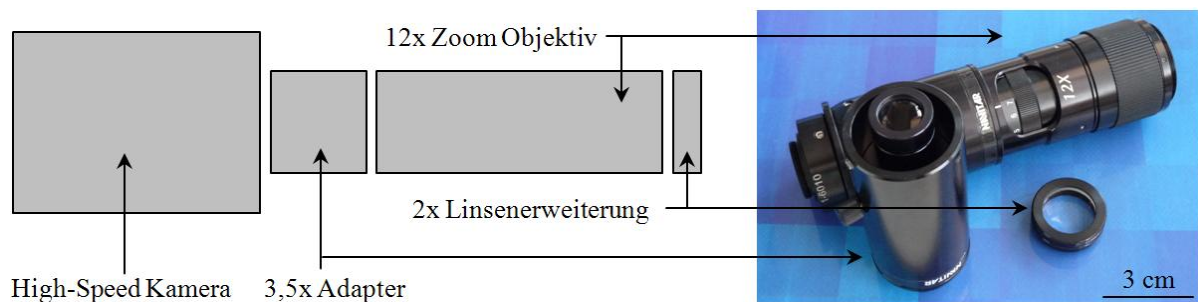
Stroboskopische Aufnahmen erlauben keine zeitaufgelöste Auswertung an einem Tropfen und bei der Auswertung an mehreren Tropfen weisen diese, wie im Abschnitt 8.1 erläutert, einen Fehler von 9,5 % auf. Da dieser im Bereich der relevanten Druckänderung an der Düse liegen kann, wurde eine High-Speed Kamera, um zeitaufgelöste Messungen an einem Tropfen durchführen zu können, eingesetzt.

### 8.2.2. Aufbau mit konstanter Lichtquelle

Bei diesen Experimenten wurde eine monochrome Photron FastCam SA4-500K-M1 mit maximaler Framerate von 0,5 MHz und einer Auflösung des CMOS-Sensors von 1024x1024

Pixel verwendet. Für eine gute Aufnahme ist somit eine starke Vergrößerung der Tropfen nötig. Zur Beleuchtung des Tropfen wurde eine starke konstante Lichtquelle eingesetzt.

Um den Tropfen aufzulösen, wurde eine Optik von Navitar verwendet. Der gesamte Optikaufbau setzt sich aus einer Linsenerweiterung mit 2-facher Vergrößerung, einem 12x-Zoomobjektiv und einem Adapter mit zusätzlicher Vergrößerung von 3,5 zusammen. Die Auflösungsgrenze des Systems liegt bei  $0,83 \mu\text{m}$  und die Gesamtvergrößerung ohne Linsenerweiterung bei 42. Eine schematische Darstellung des Aufbaus ist in der Abbildung 8.7 gezeigt.



**Abbildung 8.7.:** Aufbau der für zeitaufgelöste Messungen eingesetzter Optik von Navitar. An die High-Speed Kamera wurden ein Adapter, ein Zoom-Objektiv mit einstellbarer Vergrößerung und eine Linsenerweiterung eingebaut.

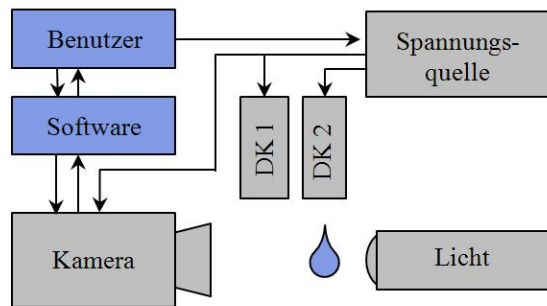
Die Lichtmenge, die durch den optischen Aufbau den Kamerasensor erreicht, verkleinert sich proportional zur Vergrößerung. Mit der eingesetzten Optik erreicht man auf dem CMOS-Sensor die Darstellung einer Fläche von ca.  $500 \times 500 \mu\text{m}^2$ . Dadurch wird der Tropfendurchmesser von  $20 \mu\text{m}$  auf etwa 40 Pixeln dargestellt. Diese Vergrößerung ist deutlich höher als die der im Laborducker eingebauten Kamera, so dass mit der in diesen Experimenten eingesetzten Optik auch kleinere Filamente bei der Tropfenbildung aufgelöst werden können.

Um die Aufnahmen steuern und damit verzögern zu können, wurden Photron-Kamera und der untersuchte Düsenkanal synchronisiert. Dazu wurde das Spannungssignal zur Erzeugung des Tropfens als Triggersignal für die Photron-Kamera genommen. Bei dem zur Erzeugung des Tropfens eingesetzten Spannungssignal liegt die Spannung bei 22 Volt, wie im Abschnitt 8.1.1 bereits vorgestellt. Die Photron-Kamera lässt jedoch eine Triggerspannung von maximal 5 Volt zu, was das Einsetzen eines abgeschwächten Spannungssignals voraussetzt.

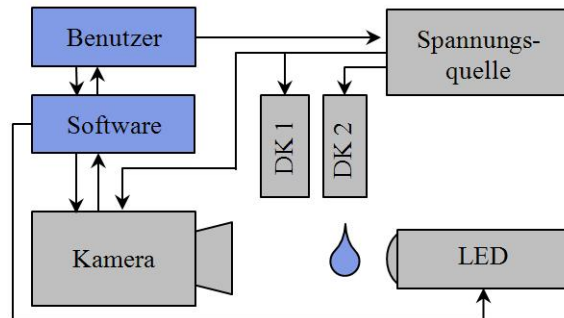
Zur Betrachtung der Tropfenbildung wurde in diesem Fall die Synchronisierung einzelner Düsenkanäle im Druckkopf genutzt. So wurde an einen Düsenkanal das abgeschwächte Spannungssignal als Triggersignal und an einen anderen Düsenkanal wiederum das Spannungssignal in voller Stärke eingesetzt und die Tropfenbildung betrachtet. Der schematische Aufbau findet sich in der Abbildung 8.8. Die Spannungssignale wurden an die-

ser Stelle von unterschiedlichen Düsenkanälen genommen, um durch die zusätzlichen Messaufbauten das zur Erzeugung des Tropfens eingesetzte Spannungssignal nicht zu beeinflussen.

Um die Verzögerung der Aufnahmen zu leisten, wurden diese nach dem Ankommen des Triggersignals zeitlich verzögert, was durch die mit der Photron-Kamera gelieferten Software geleistet wurde. Somit konnte eine Tropfenaufnahme zu beliebigem Zeitpunkt nach dem Ankommen des Spannungssignals an die Düse gewährleistet werden.



**Abbildung 8.8.:** Schematischer Aufbau optischer Experimente mit einer konstanten Lichtquelle. Mit DK wurden Düsenkanäle abgekürzt.



**Abbildung 8.9.:** Schematischer Aufbau mit durch Photron-Kamera angesteuerter Lichtquelle. Mit DK wurden Düsenkanäle abgekürzt.

An den Aufnahmen war sofort erkennbar, dass die durch konstante Lichtquelle gelieferte Lichtmenge für die hohen Frameraten unzureichend ist. Die maximale Framerate, bei der ein Tropfen im Bild zu erkennen war, lag bei 20 kHz. Diese Framerate erlaubt 20 Aufnahmen des gleichen Tropfens bei einer Tropfenfrequenz von 1 kHz. Jedoch dadurch, dass das Aufnahmefeld durch eingesetzte Optik sehr eingeschränkt ist, konnte maximal 1 Aufnahme des gleichen Tropfens gemacht werden.

Um die zeitaufgelöste Messungen durchzuführen zu können, reichte die Framerate also nicht aus. Aus diesem Grund war eine weitere Optimierung des optischen Aufbaus notwendig.

### 8.2.3. Aufbau mit synchronisierter Lichtquelle

Um den ersten Experimentaufbau zu optimieren, wurde eine LED-Quelle anstatt von einer konstanten Lichtquelle eingesetzt. Diese sendet kurze und starke Lichtpulse aus, die eine höhere Intensität als die konstante Lichtquelle im ersten Experiment hat. Abbildung 8.9 zeigt eine schematische Darstellung des optimierten Versuchsaufbaus.

Die Synchronisierung der Photron-Kamera und der Lichtquelle erfolgte in diesem Fall ebenso wie in Experimenten aus Abschnitt 8.2.2.

Durch die Verbesserung des Aufbaus konnte die Framerate der Photron-Kamera auf 40 kHz erhöht werden. Trotzdem hat sich ein weiteres Problem ergeben. Die Spannungssignale, die zur Synchronisierung des optischen Aufbaus genutzt wurden, weisen eine sehr flache Einstiegsflanke auf. Das Triggersignal wurde aus diesem Grund zu unterschiedlichen Zeitpunkten als solches erkannt, wodurch eine Synchronisierung unmöglich war. Der Einsatz anderer Spannungsquellen mit einem definierten Spannungssignal zur Tropfenbildung anstatt der Synchronisierung des Aufbaus führte jedoch nicht zur reproduzierbaren Tropfenbildung.

Der Aufbau wurde infolge dessen hinsichtlich des Einsatzes einer externen Quelle zur Erzeugung des Triggersignals geändert.

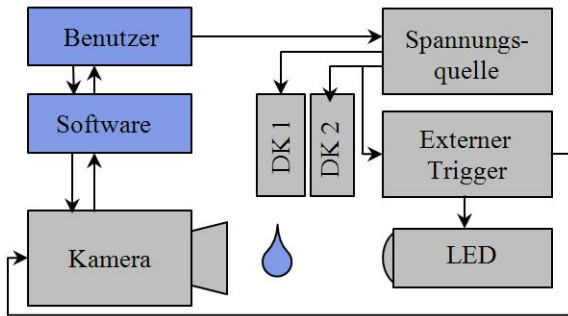
#### **8.2.4. Aufbau mit externer Pulsquelle**

Um die Synchronisierung des Aufbaus zu verbessern und dabei die Tropfenbildung nicht zu beeinflussen, wurde eine externe Quelle zur Erzeugung des Triggersignals eingesetzt. Als solcher wurde ein programmierbarer Funktionsgenerator Kontron 8020 verwendet. Nach der Abstimmung mit der Spannungsquelle des Labordruckers sendete dieser Triggersignale an die Photron-Kamera und die Lichtquelle. Der schematische Aufbau wird in Abbildung 8.10 gezeigt. Die Problematik der flachen Flanke des Spannungssignals aus Abschnitt 8.2.3 wurde dadurch gelöst, dass das Triggersignal beim ersten Durchgang des Spannungssignals ausgelöst und anschließend unabhängig von weiteren ankommenden Signalen mit einer konstanten Frequenz an die Lichtquelle und an die Photron-Kamera geliefert wird. Dadurch kann zwar eine undefinierte Zeitverschiebung aufgrund der flachen Flanke des Spannungssignals nicht vermieden, jedoch eine reproduzierbare Synchronisierung erreicht werden.

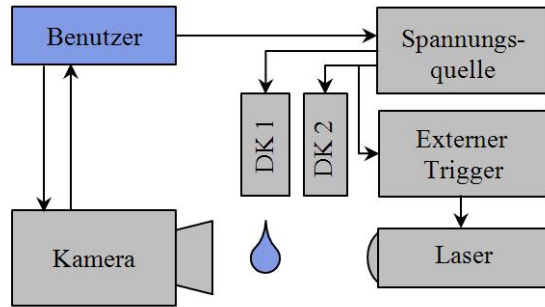
Eine scharfe Tropfenaufnahme war trotzdem immer noch unmöglich, da eine Framerate von 40 kHz eine Belichtungszeit von 25  $\mu\text{s}$  impliziert. Die Tropfengeschwindigkeiten bei dem hier eingesetzten Druckkopf liegen im Bereich 5-20 m/s und die Verschmierung des Tropfens im Bild bei einer Geschwindigkeit von 10 m/s beträgt somit etwa 250  $\mu\text{m}$ . Das ist wesentlich größer als der Tropfendurchmesser von etwa 20  $\mu\text{m}$ , was eine Auswertung unmöglich macht.

Eine weitere Überlegung war, die Tropfen in einem Abstand von ca. 5 cm unter der Düse aufzunehmen, da durch die Reibung mit der Luft das Tropfen seine Geschwindigkeit verliert. Bei zeitaufgelösten Messungen würde dies zwar keine Vorteile bringen, jedoch





**Abbildung 8.10.:** Schematischer Aufbau mit einer externen Quelle zur Erzeugung des Triggersignals. Mit DK wurden hier die Düsenkanäle abgekürzt.



**Abbildung 8.11.:** Nicht realisierter schematischer Aufbau mit einer gepulsten Laserquelle. Mit DK wurden Düsenkanäle abgekürzt.

einen Vergleich zu den Aufnahmen mit der im Labordrucker angebauten Kamera aus Abschnitt 8.1 liefern. Die Schärfe der Bilder konnte durch Geschwindigkeitsverlust der Tropfen in der Luft deutlich verbessert werden. Eine reproduzierbare Aufnahme war aufgrund der Streuung der Tropfenrichtungen trotzdem unmöglich.

### 8.2.5. Aufbau mit Laserquelle

Eine weitere Überlegung führte an dieser Stelle zum Einsatz anderer Lichtquellen, die möglichst kurze und starke Lichtpulse aussenden. Beim Einsatz dieser Lichtquellen kann auch auf die High-Speed Kamera verzichtet und eine gewöhnliche Kamera mit größerer Pixelanzahl eingesetzt werden. Aufgrund einer größeren Pixelanzahl kann auf kleinere Vergrößerung des Tropfens im Bild übergegangen werden und somit eine stärkere Belichtung erreicht werden. Der mögliche Aufbau wird in der Abbildung 8.11 gezeigt. Da die herkömmlichen LEDs nicht ausreichten, wurde der Einsatz von gepulsten Laserlichtquellen in Betracht gezogen.

Da sich eine einfache Kamera nur schwer synchronisieren lässt, muss diese deswegen manuell bedient werden. Die Belichtungszeit der einfachen Kamera kann benutzerdefiniert auf einen längeren Wert eingestellt werden. Sobald die Experimente im abgedunkelten Raum stattfinden, kommen lediglich die durch die Laserbelichtung erzeugten Aufnahmen am Sensor der Kamera an.

Da Aufwand und Kosten des optischen Aufbaus stets steigen, wurde auf weitere Verfeinerungen verzichtet und elektrische Messungen zur Validierung der Modelle eingesetzt.

### 8.3. Elektrische Messungen

Bei elektrischen Messungen werden die Eigenschaften des Piezoelementes zur Rückkopplung genutzt. Im Düsenkanal wird das Piezoelement als Aktor eingesetzt, der sich durch die ankommenden Spannungssignale verformt. Durch die Änderung des Drucks in den Fluidkanälen verformt sich jedoch das Piezoelement auch und erzeugt eine Spannung, die ebenfalls detektiert werden kann. Somit können sowohl Eingangssignale, als auch Ausgangssignale detektiert und anschließend ausgewertet werden. Ähnliche Messungen wurden an anderen Aufbauten bereits erfolgreich realisiert [83][84][85].

In elektrischen Messungen kann der Amplitudenverlauf der tatsächlichen Übertragungsfunktion des modellierten Düsenkanals bestimmt werden, der einen direkten Vergleich zum Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion des im Modell abgebildeten Düsenkanals liefert.

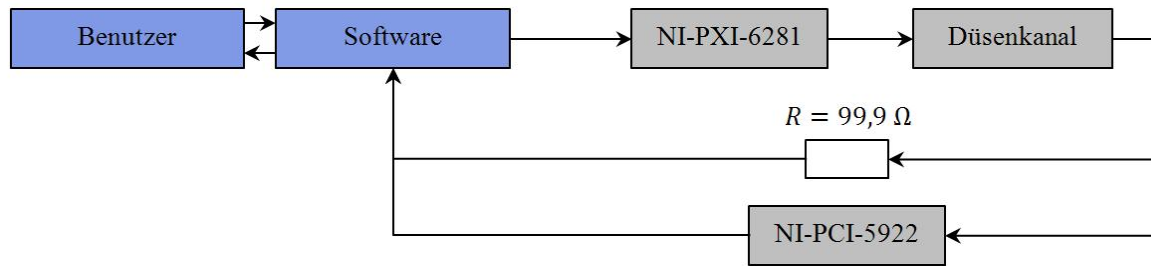
Um einen direkten Vergleich der tatsächlichen Übertragungsfunktion und der im Kapitel 6 modellierten Übertragungsfunktion zu leisten, wurde bei den elektrischen Messungen destilliertes deionisiertes Wasser wie auch bei den Experimenten im Abschnitt 8.2 eingesetzt.

#### 8.3.1. Experimenteller Aufbau

Zur Bestimmung des Amplitudenverlaufs der Übertragungsfunktion wurde die Sprungantwort des Düsenkanals gemessen. Dazu wurde ein rechteckiges Spannungssignal an das Piezoelement gesendet und die Sprungantwort des Düsenkanals aufgenommen.

Da die Auswertung im Bildbereich erfolgt, sollen die Spannungssignale aus dem Zeitbereich in das Bildbereich durch eine Fourier-Transformation überführt werden. Um höhere Frequenzen präzise abbilden zu können, sollen sowohl die Kabel als auch die Spannungsquelle dafür geeignet sein.

Um Spannungssignale durch die Kabel möglichst nicht zu beeinflussen, wurden Koaxialkabel RG 58 verwendet. Insgesamt beträgt die Länge der Koaxialkabel, die mit einem Widerstand von ca.  $0,05 \Omega/\text{m}$  [158] zu dem Gesamtwiderstand beitragen, im Aufbau ca. 8 m. Die Kontaktwiderstände tragen zu dem Gesamtwiderstand auch bei, können jedoch hier nicht abgeschätzt werden. Die im Labordrucker eingebaute Spannungsquelle kann, wie bereits im Abschnitt 8.2.3 beschrieben, keine steilen Flanken abbilden und es wurde an dieser Stelle eine externe Spannungsquelle eingesetzt. Für diese Messungen war keine reproduzierbare Tropfenbildung im Gegensatz zu den im Abschnitt 8.2 durchgeführten



**Abbildung 8.12.:** Schematischer Aufbau der elektrischen Messungen. Die Sprungantwort des Systems wurde an einem Widerstand gemessen, um die Spannungsregelung der NI-PXI-5922 Karte zu umgehen. Als Kabel wurden in diesem Aufbau Koaxialkabel RG 58 eingesetzt.

Experimenten nötig, sodass der Einsatz einer externen Spannungsquelle an dieser Stelle rechtfertigt ist. Als Spannungsquelle wurde eine NI-PXI-6281 Karte von National Instruments mit einem analogen Ausgang mit einer 16-bit Auflösung eingesetzt. Die Karte kann für diesen Fall ausreichende Frequenzen bis zu 2 MHz erzeugen.

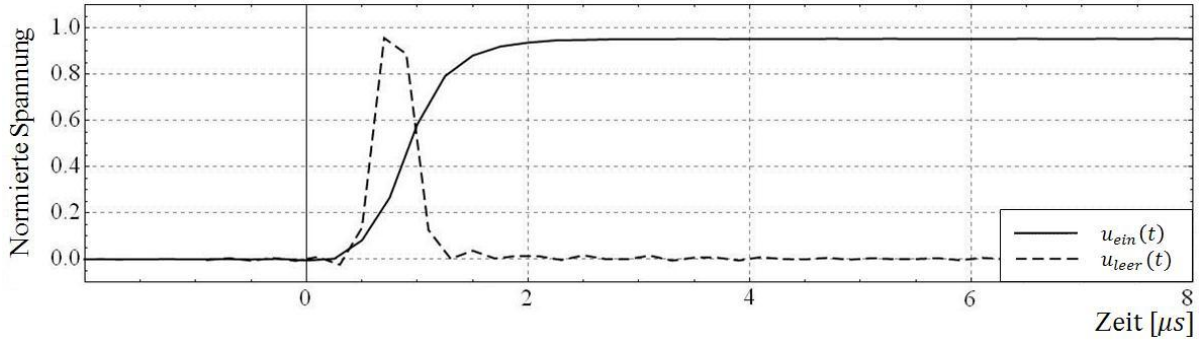
Zur Messung der Sprungantwort des Düsenkanals wurde eine weitere NI-PCI-5922 Karte von National Instruments mit einer 8 Mbit Auflösung zum Einsatz gebracht. Diese erlaubte die Spannungsänderungen im Bereich von wenigen  $\mu\text{V}$  zu messen. Die Abtastfrequenz kann dabei bis 10 MHz betragen. Das von der NI-PXI-6281 Karte mit 2 MHz erzeugte Eingangssignal wird somit 5-Mal schneller abgetastet. Die Steuerung der beiden Karten sowie die Aufnahme der Spannungssignale von der NI-PCI-5922 erfolgten durch das in LabVIEW 12.1 implementierte Script.

Der elektrische Messaufbau ist schematisch in der Abbildung 8.12 gezeigt. Die Messung der Sprungantwort erfolgte an einem zu dem Düsenkanal in Reihe geschalteten Widerstand von  $99,9 \, \Omega$ . Dieser Aufbau erlaubt die Aufnahme der Sprungantwort ohne die Einwirkung der Regelung von der NI-PCI-5922, die von Piezoelement erzeugte Spannungen unterdrücken kann.

Die Kontakte an dem Plastikkörper des Druckkopfs, siehe dazu die Abbildung 2.5 auf der Seite 9, wurden in einem weiteren Test einzelnen Düsenkanälen zugeordnet, so dass diese ebenfalls getrennt angesteuert werden und externe Messungen erfolgen konnten.

### 8.3.2. Elektrische Messungen am Düsenkanal

Um die Sprungantwort zu bestimmen, wurde der Düsenkanal durch ein rechteckiges Spannungssignal  $u_{\text{ein}}(t)$  angeregt. Dieses weist einen Sprung von 0 V auf 10 V mit einer Frequenz von 5 Hz. Dieses Spannungssignal ist in der Abbildung 8.13 dargestellt.



**Abbildung 8.13.:** Das zur Anregung des Düsenkanals eingesetzte Spannungssignal  $u_{ein}(t)$  und die Spannung am Widerstand  $R$  ohne Düsenkanal  $u_{leer}(t)$ . Die Spannungen  $u_{ein}(t)$  und  $u_{leer}(t)$  wurden zur Veranschaulichung auf 1 normiert.

Um zu zeigen, dass die Messung die Antwort des Düsenkanals auf die Anregung wiedergibt und nicht durch die Kabel und den restlichen Aufbau zustande kommt, wurde eine Messung der Sprungantwort am Widerstand  $R$  ohne angeschlossenen Düsenkanal durchgeführt. Der Verlauf der Spannung am Widerstand  $u_{leer}(t)$  ist ebenfalls in Abbildung 8.13 gezeigt. Die Sprungantwort  $u_{leer}(t)$  wurde für die weitere Auswertung als Eingangssignal interpretiert und für eine bessere Statistik wurden insgesamt 5 gemessene Sprungantworten  $u_{leer}(t)$  zu  $\bar{u}_{leer}(t)$  gemittelt.

Die Messung hat aufgrund einer ansteigenden und einer absteigenden Flanke des Spannungssignals sowohl positive als auch negative Sprungantworten aufgezeigt. Das Verhältnis der Spannungsdauer bei 0 und 10 V betrug 1:1, so dass zur Auswertung eine Zeitspanne von 0,1 s zur Verfügung stand. Die Sprungantwort des Düsenkanals wurde, wie im Abschnitt 8.3.1 beschrieben, mit einer Abtastrate von 10 MHz aufgenommen.

Um zu zeigen, dass die Sprungantwort des Düsenkanals abhängig von dem Fluid ist, wurde die Sprungantwort  $u_{S,0}(t)$  am mit Luft gefüllten System und die Sprungantwort  $u_S(t)$  am mit Wasser gefüllten Düsenkanal gemessen.

Diese Messungen belegen, dass die Sprungantworten  $u_{S,0}(t)$  und  $u_S(t)$  sich von einander unterscheiden und somit die Sprungantwort des Düsenkanals  $u_S(t)$  tatsächlich die fluidabhängige Sprungantwort des Düsenkanals ist und nicht durch den Messaufbau oder das Piezoelement gegeben ist. Die Sprungantwort des mit Wasser gefüllten Düsenkanals  $u_S(t)$  wurde bei der weiteren Auswertung als Ausgangssignal interpretiert und für eine bessere Statistik wurden insgesamt 5 am selben Düsenkanal gemessenen Sprungantworten  $u_S(t)$  zu  $\bar{u}_S(t)$  gemittelt.

Alle hier aufgeführten Messungen wurden an einem Düsenkanal durchgeführt. Die Ergebnisse sind somit von den Variationen zwischen den Düsenkanälen unabhängig. Um die Abhängigkeit der Sprungantworten  $u_S(t)$  abhängig von den Variationen zwischen

einzelnen Düsenkanälen zu zeigen, wurden diese an verschiedenen mit Wasser gefüllten Kanälen gemessen.

## 8.4. Validierung des Modells

Die Validierung des im Kapitel 6 erstellten Modells des Düsenkanals wird durch den direkten Vergleich des im Modell bestimmten und tatsächlichen Amplitudenverlaufs der Übertragungsfunktion des Düsenkanals durchgeführt.

Zur Bestimmung der tatsächlichen Übertragungsfunktion wurde wie im Abschnitt 8.3.2 beschrieben die gemittelte Sprungantwort  $\bar{u}_S(t)$  des mit Wasser gefüllten Düsenkanals vermessen und mit der gemittelten Sprungantwort  $\bar{u}_{leer}(t)$  ohne angeschlossenen Düsenkanal normiert. Die mit  $\bar{u}_{leer}(t)$  normierte Sprungantwort des Düsenkanals  $\bar{u}_S(t)$  kann durch die Laplace-Transformation in den Bildbereich mit dem Amplitudenverlauf der modellierten Übertragungsfunktion  $\underline{G}(j\omega)$  in Zusammenhang gebracht werden. Es gilt:

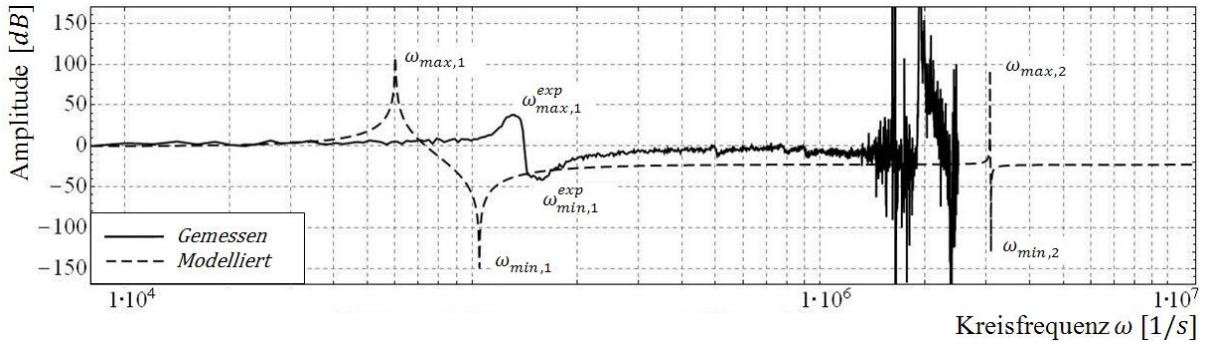
$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\bar{u}_S(t)}{\bar{u}_{leer}(t)} \right\} = |\underline{G}(j\omega)|. \quad (8.5)$$

Auf diese Weise können auch die Übertragungsfunktionen verschiedener Düsenkanäle bestimmt und mit einander verglichen werden.

### 8.4.1. Vergleich von Modell und Experiment

Abbildung 8.14 gibt den experimentell bestimmten Amplitudenverlauf und den Amplitudenverlauf der komplexen Übertragungsfunktion  $|\underline{G}(j\omega)|$  des mit konzentrierten Parametern modellierten Düsenkanals in einem Plot wieder.

In der Abbildung 8.14 ist der Amplitudenverlauf im Bereich zwischen  $1 \cdot 10^4$  1/s und  $1 \cdot 10^7$  1/s aufgetragen. Die Amplitude der modellierten Übertragungsfunktion wurde hier mit dem Vorfaktor  $a_0/b_0$ , siehe dazu Gleichung 7.4 auf Seite 94, normiert. Der experimentell bestimmte Amplitudenverlauf konnte aufgrund von der NI-PXI-6281 Karte abgebildeten Frequenzen bis ca. 2 MHz, wie im Abschnitt 8.3.1 bereits diskutiert, auch nur bis 2 MHz aufgenommen werden. Im weiteren wird aus diesem Grund der Verlauf der experimentell bestimmten und modellierten Amplitude nur im Frequenzbereich bis 1 MHz verglichen.



**Abbildung 8.14.:** Amplitudenverlauf der tatsächlichen Übertragungsfunktion, berechnet aus gemessenen Sprungantworten im Abschnitt 8.3.2 und mit konzentrierten Parametern im Abschnitt 7.1.3 modellierter Übertragungsfunktion eines Düsenkanals.

Die beiden Amplituden stimmen in ihrem Verlauf überein, jedoch stimmt die Lage des Maximums  $\omega_{max,1}$  und des Minimums  $\omega_{min,1}$  und der Verlauf der Amplitude für große Frequenzen  $\omega$  mit experimentell bestimmten Extrema  $\omega_{max,1}^{exp}$  und  $\omega_{min,1}^{exp}$  nicht überein.

Die Lage des Maximums  $\omega_{max,1}^{exp}$  und des Minimums  $\omega_{min,1}^{exp}$  der aus Sprungantworten bestimmten Amplitude sind im Vergleich zu modellierten Maximum  $\omega_{max,1}$  und Minimum  $\omega_{min,1}$  zu höheren Frequenzen  $\omega$  verschoben. Die Tabelle 8.1 auf der Seite 120 zeigt diese Verschiebung im Vergleich.

Die Prüfung mit  $\chi^2$ -Test nach Pearson [159] liefert einen Wahrscheinlichkeitswert  $p$  von weniger als 0,0001. Das heißt, dass die beiden Amplitudenverläufe nicht übereinstimmen. Der  $\chi^2$ -Test wurde dabei im  $\omega$ -Bereich zwischen 30 kHz und 200 kHz durchgeführt, da in diesem Frequenzbereich die wesentlichen Merkmale des Amplitudenverlaufs der beiden Übertragungsfunktionen wiedergegeben werden.

Um die Übertragungsfunktionen einzelner Düsenkanäle untereinander zu vergleichen, wurden, wie im Abschnitt 8.3.2 beschrieben, die Sprungantworten  $u_S(t)$  einzelner Düsenkanäle bestimmt und die Übertragungsfunktionen berechnet. Die einzelnen Amplituden unterscheiden sich untereinander. Die Verschiebung der Maxima untereinander liegt im Bereich von 8 %.

### 8.4.2. Modelloptimierung

Wie im Kapitel 7 diskutiert, haben die Bauelemente im Modell einen Einfluss auf den Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion. Die wesentlichen Bauelemente im Modell wurden aus der Geometrie und den Eigenschaften der physikalischen Elemente berechnet. Das Bauelement  $C_{K7}^E$  wurde im Gegensatz dazu frei gewählt, womit die größte Annahme im Modell gemacht wurde. Da das Bauelement jedoch einen direkten Einfluß auf die

Position des Maximums und des Minimums sowie Verlauf der Amplitude bei hohen Frequenzen im Modell hat, wie in der Abbildung 7.4 auf der Seite 99 links gezeigt ist, wird an dieser Stelle eine Anpassung dieses Bauelementes vorgenommen.

Für die Optimierung des Bauelementes  $C_{K7}^E$  wurde in Wolfram Mathematica 8.0 ein Script implementiert, der das Bauelement  $C_{K7}^E$  an den experimentell bestimmten Amplitudenverlauf fittet. Im Script werden die Werte für das Bauelement  $C_{K7}^E$  solange geändert, bis eine Übereinstimmung erreicht wurde und anschließend wird ein  $\chi^2$ -Test durchgeführt. Das implementierte Script kann dem Anhang B.3 entnommen werden.

Der dadurch optimierte Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion ist in Abbildung 8.15 im Vergleich zu im Experiment bestimmten Amplitudenverlauf gezeigt. Der maximale Wahrscheinlichkeitswert  $p$  des  $\chi^2$ -Tests beträgt hier 0,52.

Die Werte des Maximums  $\omega_{max,1}$  und des Minimums  $\omega_{min,1}$  für das angepasste Bauelement  $C_{K7}^E$  sind in der Tabelle 8.1 auf der Seite 120 angegeben. Die Lage der Peaks ließ sich also mit Übereinstimmung besser 3 % bestimmen. Dieser Fehler ist kleiner als die Streuung von 8 % in einzelnen Düsenkanälen, wie im Abschnitt 8.4.1 bereits diskutiert. Der zu niedrige Wahrscheinlichkeitswert  $p$  des  $\chi^2$ -Tests resultiert aus der Abweichung der Amplitudenverläufe bei dem Maximum  $\omega_{max,1}$  und dem Minimum  $\omega_{min,1}$ .

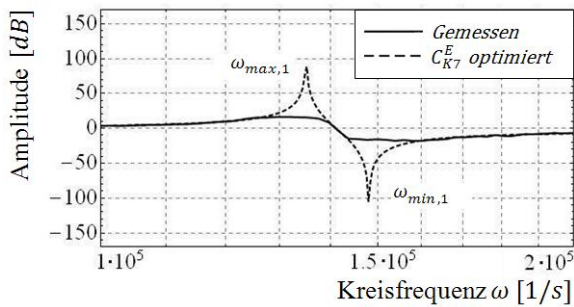


Abbildung 8.15.: Tatsächliche und modellierte Übertragungsfunktion nach der Optimierung des Bauelementes  $C_{K7}^E$ .

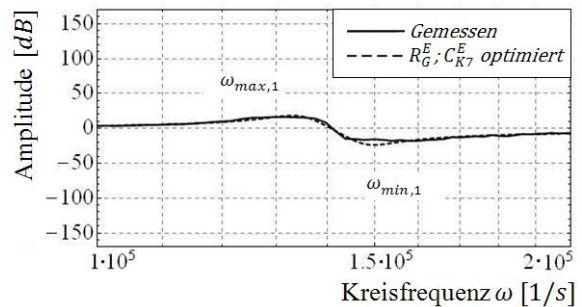


Abbildung 8.16.: Tatsächliche und modellierte Übertragungsfunktion mit optimierten Bauelementen  $R_G^E$  und  $C_{K7}^E$ .

Im Kapitel 7 wurde bereits gezeigt, dass der Verlauf der Peaks durch das Bauelement  $R_G^E$  gegeben ist, siehe dazu Abbildung 7.3 auf der Seite 98.

Wird eine Optimierung des Bauelementes  $R_G^E$  vorgenommen, so bekommt der Amplitudenverlauf der modellierten Übertragungsfunktion die Form wie in der Abbildung 8.16 gezeigt. Die Optimierung wurde dabei mit gleichem Script wie bei Bauelement  $C_{K7}^E$  in Wolfram Mathematica 8.0 vorgenommen, siehe dazu den Anhang B.3. Der  $\chi^2$ -Test liefert einen Wahrscheinlichkeitswert  $p$  von 0,997 und somit stimmen die beiden Funktionen

überein. In der Tabelle 8.1 sind die Werte der im Modell bestimmten und optimierten Bauelemente  $C_{K7}^E$  und  $R_G^E$  angegeben.

	Optimierung		Modell		Experiment		$\chi^2$ -Test
	Vor	Nach	$\omega_{max,1}$ [1/s]	$\omega_{min,1}$ [1/s]	$\omega_{max,1}^{exp}$ [1/s]	$\omega_{min,1}^{exp}$ [1/s]	$p$
-	-	-	60.082	104.738	131.000	154.000	<0,0001
$C_{K7}^E$	1 $\mu$ F	225 nF	135.500	148.000	131.000	154.000	0,52
$R_G^E$	2,34 m $\Omega$	6 $\Omega$	135.500	148.000	131.000	154.000	0,997

**Tabelle 8.1.:** Lage des Maximums und des Minimums in Abhängigkeit von im Kapitel 6 berechneten und optimierten Bauelementen  $C_{K7}^E$  und  $R_G^E$ . In erster Zeile sind die Werte für berechnete Bauelemente ohne Optimierung gegeben.

Das angepasste Bauelement  $C_{K7}^E$  unterscheidet sich im Vergleich zu dem angenommenen Bauelement um Faktor 5. Da das Bauelement  $C_{K7}^E$  bei der Modellbildung angenommen wurde, wird an dieser Stelle von der weiteren Diskussion des Unterschieds abgesehen.

Das Bauelement  $R_G^E$ , das den Widerstand im Düsenkanal beschreibt, unterscheidet sich im Vergleich zu dem berechneten Wert wesentlich stärker. Dieser Unterschied ist durch die Koaxialkabel im Messaufbau, siehe dazu die Abbildung 8.12 auf der Seite 115, zu erklären. Zusätzlich tragen auch die Übergangswiderstände zu dem Gesamtwiderstand im Messaufbau und somit zu dem Bauelement  $R_G^E$  bei. Diese können jedoch nicht abgeschätzt werden. Auch die Messung der Spannung an einem Widerstand von 99,9  $\Omega$  trägt zu Dämpfung der gemessenen Sprungantwort  $u_S(t)$  und somit dem berechneten Amplitudenverlauf bei.

## 8.5. Diskussion der Ergebnisse

An den Düsenkanälen des im Labordrucker eingebauten Druckkopfs DMC-11610 wurden sowohl optische als auch elektrische Messungen durchgeführt. Die optischen Messungen wurden zur Untersuchung der Reproduzierbarkeit der Tropfenbildung sowohl in einem als auch in mehreren Düsenkanälen einer Düsenplatte eingesetzt. Die Messungen zeigten, dass auch in einem Düsenkanal das Volumen der Tropfen stark variiert und die Streuung bei 9,5 % liegt, wie im Abschnitt 8.1.2 bereits diskutiert. Da das Tropfenvolumen im Wesentlichen durch den Fluidfluss gegeben ist, kann nur eine auf etwa 10 % genaue Modellabbildung des Fluidflusses im Düsenkanal vorgenommen werden. Andererseits braucht man für das hier untersuchte Düsenkanal nur ein Modell, das eine Genauigkeit von 90 % aufweist.



Die Abweichung bei der Tropfengeschwindigkeit tritt durch die Abweichungen im Druckverlauf in den Düsenkanälen auf. Der Fehler liegt unter 2,2 % und ist damit kleiner als der eigentliche Auswertungsfehler. Im Gegensatz hierzu variiert die Tropfengeschwindigkeit in unterschiedlichen Düsenkanälen um etwa 4,1 %. Der vorgenannte Fehler deutet auf geometrische Abweichungen der verschiedenen Düsenkanäle hin. Ein möglicher Grund könnte der Unterschied des Fluidkanals- oder Düsendurchmesser in einzelnen Düsenkanälen sein.

Der Auswertungsfehler bei der Bestimmung des Tropfenvolumens liegt dabei bei ca. 3,7 % und bei der Bestimmung der Tropfengeschwindigkeit bei ca. 2,2 %.

Da die optischen Messungen mit einer im Labordrucker eingebauten Kamera erfolgten, konnte ein Tropfen nur auf etwa 20 Pixel aufgelöst werden. Weiterhin wurde bei der Umrechnung der Tropfenfläche im Bild auf das Volumen angenommen, dass der Tropfen eine sphärische Form hat, was eventuell nicht der Fall sein kann. Da die Tropfen auch in einer Ebene aufgenommen wurden, kann eine Verschiebung der Tropfen aus der Schärfeebene der Kamera die Ergebnisse der Messung beeinflussen. Diese Fehler sind nur schwer abzuschätzen und wurden bei der Berechnung des Auswertungsfehlers nicht berücksichtigt.

Optische Messungen dienten weiterhin zur Beurteilung der Genauigkeit, mit der das Modell den Düsenkanal abbilden sollte. Da die Unterschiede in dem Volumen der Tropfen in verschiedenen Düsenkanälen im Bereich von 9,5 % und in der Geschwindigkeit im Bereich von 4,1 % lagen, kann eine genauere Modellabbildung des Düsenkanals im Modell nicht erreicht werden.

Weiterhin wurden zeitaufgelöste Messungen zur Bestimmung des Druckes an dem Ausgang des Düsenkanals eingesetzt. Um die Tropfenbildung zeitlich aufzulösen, wurde eine High-Speed Kamera eingesetzt und unterschiedliche Aufbauten ausprobiert.

Da zur Aufnahme des Tropfens mit einer zur Auswertung notwendiger Vergrößerung eine große Lichtmenge nötig war, brachten die zeitaufgelösten optischen Messungen kein zufriedenstellendes Ergebnis. Eine Verbesserung des Aufbaus könnte bessere Ergebnisse liefern, jedoch dadurch, dass der gewünschte Aufbau nicht eingesetzt werden konnte, wurde auf die zeitaufgelösten optischen Messungen verzichtet.

Um die Validierung des im Kapitel 6 erstellten Modells des Düsenkanals vorzunehmen, wurden elektrische Messungen am Piezoelement vorgenommen. Anhand elektrischer Messungen wurde der tatsächliche Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion des Düsenkanals bestimmt. Zum einen wurde gezeigt, dass die gemessene Sprungantwort fluidabhängig ist und somit zur Bestimmung der tatsächlichen Übertragungsfunktion eingesetzt

werden kann. Um das zu zeigen, wurden zuerst die Sprungantwort  $u_{leer}$  am Widerstand  $R$  ohne angeschlossenen Düsenkanal gemessen und anschließend die Sprungantworten am mit Luft gefüllten Düsenkanal  $u_{S,0}(t)$  und am mit Wasser gefüllten Düsenkanal  $u_S(t)$  gemessen. Alle drei Sprungantworten unterscheiden sich von einander, so dass die Sprungantwort  $u_S(t)$  eine fluidabhängige Sprungantwort des Düsenkanals ist.

Aus dem Quotient der Sprungantworten konnte nun der tatsächliche Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion des Düsenkanals durch Laplace-Transformation in den Bildbereich bestimmt werden. Für die Auswertung und Bestimmung des tatsächlichen Amplitudenverlaufs wurde die gemittelte Sprungantwort  $\bar{u}_{leer}$  als Eingangssignal und die gemittelte Sprungantwort des mit Wasser gefüllten Düsenkanals  $\bar{u}_S(t)$  als Ausgangssignal interpretiert. Durch den Vergleich des durch die Laplace-Transformation bestimmten tatsächlichen Amplitudenverlaufs mit dem Amplitudenverlauf der im Kapitel 6 modellierten Übertragungsfunktion des Düsenkanals kann nun das Modell validiert werden.

Der Vergleich der Amplitudenverläufe der modellierten und im Experiment bestimmten Übertragungsfunktion zeigte, dass die beiden Amplituden in ihrem Verlauf einander gleichen, jedoch wesentliche Merkmale verschoben sind, siehe dazu die Abbildung 8.14 auf der Seite 118. Der  $\chi^2$ -Test lieferte einen Wahrscheinlichkeitswert  $p$  unter 0,0001. Um den Amplitudenverlauf zu vergleichen und Fehler im Modell zu finden, wurden die im Modell berechneten Bauelemente optimiert. Durch die Optimierung der Bauelemente  $C_{K7}^E$  und  $R_G^E$  konnte eine Übereinstimmung der beiden Amplitudenverläufe erreicht werden, wie in der Abbildung 8.16 auf der Seite 119 gezeigt. Die Anpassung des Bauelementes  $C_{K7}^E$  optimierte die Position des Maximums und Minimums und die Anpassung des Bauelementes  $R_G^E$  optimierte den Verlauf der Peaks. Durch die Optimierung konnte eine Übereinstimmung mit dem Wahrscheinlichkeitswert  $p$  im  $\chi^2$ -Test von 0,997 erreicht werden.

Weiterhin zeigten die elektrischen Messungen, dass die Verläufe der Amplituden sich in verschiedenen Düsenkanälen unterscheiden. Die Lage des Maximum und des Minimums der Amplitude auf der Kreisfrequenzachse unterscheidet sich jeweils um ca. 8 %. Aus diesem Grund kann ein für einen Düsenkanal angepasster modellierter Amplitudenverlauf den Amplitudenverlauf in einem anderen Düsenkanal mit einer höheren Genauigkeit als 8 % nicht wiedergeben.

Die wesentlichen Unterschiede zwischen Modell und Experiment sind auf die getroffenen Annahmen und im Experiment bestimmte Geometrie zurückzuführen. Zum einen wurde das Bauelement  $C_{K7}^E$ , das die Nachgiebigkeit der umgebenden Luft beschreibt, frei gewählt. Der im Modell eingesetzte Wert führte schließlich zu einer Verschiebung des Maximums und Minimums der Amplitude der Übertragungsfunktion. Dadurch, dass im Modell die Kabel des Messaufbaus und die Übergangswiderstände vernachlässigt wur-

den, führte dies in der Realität zu einem größeren Widerstand als durch das Bauelement  $R_G^E$  im Modell abgebildet.

Zum zweiten wurde die Geometrie der physikalischen Elemente im Experiment bestimmt. Hier konnten das Piezoelement und die Silizium-Schicht nicht getrennt werden und somit wurde die summierte Dicke beider physikalischen Elemente bestimmt. Dies führte zu einem Fehler bei der Berechnung der Bauelemente, wie bereits im Abschnitt 7.2.5 diskutiert.

Weiterhin wurde bei der Beschreibung der Fluidkanäle der akustische Filter zwischen Kanal K4 und K2, wie in der Abbildung 6.3 auf der Seite 76 gezeigt, vernachlässigt.

Zusätzlich wurden die elektrischen Messungen aufgrund der Begrenzungen des Messaufbaus nur im Bereich der Spannungssignale durchgeführt, in denen kein Tropfen gebildet wird. Aus diesem Grund ist im Modell nur eine Meniskusbewegung beschrieben. Bei stärkeren Spannungen, bei denen Tropfen gebildet werden, soll die Übereinstimmung des Modells noch geprüft werden. Zum einen gilt in diesem Bereich keine Volumenerhaltung mehr, so dass eine weitere akustische Quelle, die den Fluidfluss nach der Tropfenbildung darstellt, eingebaut werden müsste um den Fluidfluss aus dem Fluidbehälter nachzubilden. Zum anderen kollabiert der Meniskus bei der Tropfenbildung, so dass eine Verschiebung der Frequenzen zu erwarten ist. Da die Tropfenbildung kein linearer Vorgang ist, kann durchaus eine neue Modellabbildung des Meniskus durch Netzwerke nötig sein, um das dynamische Verhalten des Düsenkanals in diesem Fall abbilden zu können.

Weiterhin könnte eine bessere Modellabbildung des Düsenkanals durch die Beschreibung des Düsenkanals mit verteilten Parametern und Berücksichtigung anderer physikalischer Elemente wie beispielsweise akustische Filter erreicht werden.

Um das Modell besser anzupassen und genauere Ergebnisse mit dem Modell zu erzielen, müssten also die physikalischen Parameter der Inkjetsysteme genau bekannt sein. Unter der Voraussetzung, dass alle hier angenommenen oder im Experiment bestimmten Parameter physikalischer Elemente genau bekannt sind, kann eine genauere Beschreibung des Düsenkanals und somit des dynamischen Verhaltens erzielt werden. In dieser Arbeit entwickelte Methode ist daher besonders für die Hersteller der Druckköpfe geeignet, die die genaue Geometrie und die Eigenschaften der Materialien von der hergestellten Druckköpfen und Düsenkanälen kennen.



---

## 9. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die Übertragbarkeit der Netzwerktheorie auf Piezo-Inkjetsysteme am Beispiel eines Labordruckers untersucht.

Dazu wurden zuerst die Grundlagen der Netzwerktheorie vorgestellt und anschließend die Modellabbildungen wesentlicher physikalischer Elemente der Piezo-Inkjetsysteme in der Netzwerktheorie vorgestellt. Dabei wurde jeweils nur ein Düsenkanal des Piezo-Inkjetsystems betrachtet. Die in der Netzwerktheorie bereits bekannten Modellabbildungen wurden dabei übernommen und für die speziell in Piezo-Inkjetsystemen vorkommenden physikalischen Elemente wurden neue Modellabbildungen hergeleitet.

Anschließend wurde ein Düsenkanal des Labordruckers mit der Netzwerktheorie modelliert. Dazu wurde am Institut für Druckmaschinen und Druckverfahren Experimente zur Bestimmung der Geometrie der physikalischen Elemente im Düsenkanal der im Labordrucker eingesetzten Druckköpfe durchgeführt. Dabei wurden aus dem Druckkopf die Düsenplatten abgebaut und in mehreren Richtungen abgeschliffen. In optischen Experimenten konnten anschließend die Abmessungen einzelner physikalischen Elemente des Düsenkanals bestimmt werden.

Weiterhin wurde der Düsenkanal des Labordruckers im Modell abgebildet. Dazu wurden bereits bekannte und neu hergeleitete Modellabbildungen einzelner physikalischer Elemente benutzt. Aus der Geometrie und den Eigenschaften der physikalischen Elemente konnten schließlich die Bauelemente des Modells berechnet werden.

Um die Stabilität und das dynamische Verhalten des im Modell abgebildeten Düsenkanals zu zeigen, wurde die Übertragungsfunktion bestimmt. Anhand dieser konnte die Stabilität des im Modell abgebildeten Düsenkanals des Labordruckers gezeigt werden. Eine weitere Charakterisierung erfolgte durch Beschreibung des dynamischen Verhaltens in Abhängigkeit von berechneten Bauelementen.

Um die Reproduzierbarkeit der Tropfenbildung zu untersuchen, wurden optische Messungen vorgenommen. Die zeitliche Stabilität des Tropfenvolumens und der Tropfengeschwindigkeit wurden untersucht. Die Messungen zeigen, dass das Volumen des Tropfens

sowohl in einem Düsenkanal als auch in verschiedenen Düsenkanälen um etwa 9,5 % variiert. Die Geschwindigkeit der Tropfen variiert dabei in einem Düsenkanal um weniger als 2,2 % und in mehreren Düsenkanälen um 4,1 %. Aus diesem Ergebnis kann entnommen werden, dass das erstellte Modell keine bessere Genauigkeit als den in optischen Experimenten bestimmten Fehler aufweisen muss.

Die elektrischen Messungen wurden anschließend zur Validierung des Modells eingesetzt. Hier wurde der Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion des modellierten Düsenkanals bestimmt. Dieser wurde direkt mit dem Amplitudenverlauf der modellierten Übertragungsfunktion verglichen. Der Vergleich zeigte, dass der grundsätzliche Verlauf der Amplitude im Modell wiedergegeben wird. Dagegen werden die wesentlichen Merkmale des Amplitudenverlaufs wie Maximum und Minimum zu kleineren Frequenzen verschoben. Durch die Anpassung der Bauelemente im Modell, die in keinem direkten Zusammenhang mit Geometrie und Eigenschaften der physikalischen Elemente des Düsenkanals stehen oder nachvollziehbar diese ändern können, konnte eine Übereinstimmung der Amplitudenverläufe erreicht werden.

Weitere elektrische Messungen an verschiedenen Düsenkanälen zeigten wiederum eine Streuung der Maximum- und Minimum-Werte um ca. 8 %, was die Genauigkeit des Modells begrenzt. Dadurch kann das an einem Düsenkanal angepasste Modell ein anderes Düsenkanal nur mit einer Genauigkeit von 92 % wiedergeben. Das entspricht in etwa der Reproduzierbarkeit der Tropfenbildung, die in optischen Experimenten bestimmt wurde.

Auch weitere experimentelle Studien zur Validierung des Modells können vorgenommen werden. Es könnte zum Beispiel die Übereinstimmung des Modells mit der Realität für komplexe Fluide studiert werden. Unter anderem kann auch die Modellierung dieser Fluide im Netzwerkmodell vorgenommen werden. Hier können zum Beispiel eine zusätzliche Masse des Fluids und die Partikel im Fluid berücksichtigt werden.

Auch die Modellierung der gesamten Düsenplatte kann erfolgen. Dazu können mehrere Düsenkanäle in einem Modell abgebildet werden, um den Einfluss des Spannungssignals an einen Düsenkanal auf das Fluid in benachbarten Düsenkanälen zu untersuchen.

In dieser Arbeit wurde also gezeigt, dass die Übertragung der Netzwerktheorie auf ein Labordrucker und somit auf Piezo-Inkjetsysteme möglich ist. In dieser Arbeit wurde das Modell unter der Annahme konzentrierter Parameter erstellt. Eine Optimierung des Modells kann durch die ortsabhängige Beschreibung physikalischer Elemente mit verteilten Parametern vorgenommen werden.

---

## 10. Literaturverzeichnis

- [1] H.P. Le, "Progress and trends in inkjet printing technology, Part 1," *Journal of Imaging Science and Technology*, vol. 42, no. 1, 1998.
- [2] E. Webster, "Print Unchained: 50 Years of Digital Printing, 1950-2000 and Beyond". *DRA of Vermont, Inc.*, 1th ed., 2001.
- [3] R. Elmquist, "Measuring Instrument of the recording type." US Patent 2566443, 1951.
- [4] S.L. Zoltan, "Pulse droplet ejection system." US Patent 3683212, 1974.
- [5] E.L. Kyser, S.B. Sears, "Liquid jet recording process and apparatus there for." Great Britain Patent 2007162, 1951.
- [6] H. Kipphan, "Handbuch der Printmedien". *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*, 1th ed., 2000.
- [7] J.C. Owens, "A Tutorial on Printing." Society for Imaging Science and Technology, 2009.
- [8] E. Hanson, "How an ink jet printer works." Society for Imaging Science and Technology, 2009.
- [9] J. Mei, M.R. Lovell, M.H. Mickle, "Formulation and Processing of Novel Conductive Solution Inks in Continuous Inkjet Printing of 3-D Electric Circuits," *IEEE Transactions on Electronics Packaging Manufacturing*, vol. 28, no. 3, pp. 265–273, 2005.
- [10] H.P. Le, "Progress and trends in inkjet printing technology, Part 2," *Journal of Imaging Science and Technology*, vol. 42, no. 1, 1998.
- [11] E. R. Lee, "Microdrop Generation". *CRC Press*, 1th ed., 2003.
- [12] M. Fährdrich, "Modellierung der Verdampfungs- und Strömungsvorgänge beim Bubble-Jet Prozess". *VDI Verlag Düsseldorf*, 1th ed., 1997.
- [13] H.P. Le, "Progress and Trends in Inkjet Printing Technology, Part 5," *Journal of Imaging Science and Technology*, vol. 42, no. 1, 1998.
- [14] B. Derby, "Inkjet Printing of Functional and Structural Materials: Fluid Property Requirements, Feature Stability, and Resolution," *Annual Review of Materials Research*, vol. 40, pp. 395–414, 2010.

- [15] P. Calvert, “Inkjet printing for materials and devices,” *Chemistry of Materials*, vol. 13, no. 10, pp. 3299–3305, 2001.
- [16] T.H.J. van Osch, J. Perelaer, A.W.M. de Laat, U.S. Schubert, “Inkjet printing of narrow conductive tracks on untreated polymeric substrates,” *Advanced Materials*, vol. 20, pp. 343–345, 2008.
- [17] L. Yang, A. Rida, R. Vyas, M.M. Tentzeris, “RFID Tag and RF Structures on a Paper Substrate Using Inkjet-Printing Technology,” *Microwave Theory and Techniques*, vol. 55, no. 12, pp. 2894–2901, 2007.
- [18] L. Yang, R. Zhang, D. Staiculescu, C.P. Wong, M.M. Tentzeris, “A Novel Conformal RFID-Enabled Module Utilizing Inkjet-Printed Antennas and Carbon Nanotubes for Gas-Detection Applications,” *Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 8, pp. 653–656, 2009.
- [19] A. Bietsch, J. Zhang, M. Hegner, H.P. Lang, C. Gerber, “Rapid functionalization of cantilever array sensors by inkjet printing,” *Nanotechnology*, vol. 15, pp. 873–880, 2004.
- [20] V. Dua, S. P. Surwade, S. Ammu, S.R. Agnihotra, S. Jain, K.E. Roberts, S. Park, R.S. Ruoff, S.K. Manohar, “All-Organic Vapor Sensor Using Inkjet-Printed Reduced Graphene Oxide,” *Angewandte Chemie International Edition*, vol. 49, no. 12, pp. 873–880, 2010.
- [21] E.R. Silva, W.C. Oliveira, L.O. Arruda, R. Bonadiman, J. Quintero, R. Mancosu, J.M. Silva Neto, “Finite Element Simulation of Inkjet Printed Strain Gage on Polyimide Substrates Applied to Flexible Boards,” *Proceedings of the 11th Electronics Packaging Technology Conference*, 2009.
- [22] A. Sawhney, A. Agrawal, P. Patra, P. Calvert, “Piezoresistive Sensors on Textiles by Inkjet Printing and Electroless Plating,” *Proceedings of the MRS Spring Meeting & Exhibit*, 2006.
- [23] Y. Yoshioka, G.E. Jabbour, “Inkjet Printing of Oxidants for Patterning of Nanometer-Thick Conducting Polymer Electrodes,” *Advanced Materials*, vol. 18, pp. 1307–1312, 2006.
- [24] J.J.P. Valetton, K. Hermans, C.W.M. Bastiaansen, D.J. Broer, J. Perelaer, U.S. Schubert, G.P. Crawford, P.J. Smith, “Room temperature preparation of conductive silver features using spin-coating and inkjet printing,” *Journal of Materials Chemistry*, vol. 20, pp. 543–546, 2010.
- [25] T.H.J. van Osch, J. Perelaer, A.W.M. de Laat, U.S. Schubert, “Inkjet Printing of Narrow Conductive Tracks on Untreated Polymeric Substrates,” *Advanced Materials*, vol. 20, pp. 343–345, 2008.
- [26] S.-C. Chang, J. Liu, J. Bharathan, Y. Yang, J. Onohara, J. Kido, “Multicolor Organic Light-Emitting Diodes Processed by Hybrid Inkjet Printing,” *Advanced Materials*, vol. 11, no. 9, pp. 734–737, 1999.



- [27] B. Geffroy, P. le Roy, C. Prat, “Organic light-emitting diode (OLED) technology: materials, devices and display technologies,” *Polymer International*, vol. 55, no. 6, pp. 572–582, 2006.
- [28] M.A. Lopez, J.C. Sanchez, M. Estrada, “Characterization of PEDOT:PSS dilutions for inkjet printing applied to OLED fabrication,” *Proceedings of the 7th International Caribbean Conference on Devices, Circuits and Systems*, 2008.
- [29] S. Gamerith, A. Klug, H. Scheiber, U. Scherf, E. Moderegger, E.J.W. List, “Direct Ink-Jet Printing of AgCu Nanoparticle and Ag-Precursor Based Electrodes for OFET Applications,” *Advanced Functional Materials*, vol. 17, no. 16, pp. 3111–3118, 2007.
- [30] K.-J. Baeg, D. Khim, J.-H. Kim, M. Kang, I.-K. You, D.-Y. Kim Y.-Y. Noh, “Improved performance uniformity of inkjet printed n-channel organic field-effect transistors and complementary inverters,” *Organic Electronics*, vol. 12, pp. 634–640, 2011.
- [31] X.-H. Zhang, S.M. Lee, B. Domercq, B. Kippelena, “Transparent organic field-effect transistors with polymeric source and drain electrodes fabricated by inkjet printing,” *Applied Physics Letters*, vol. 92, no. 24, pp. 243307–243307–3, 2008.
- [32] T. Mustonen, K. Kordas, S. Saukko, G. Toth, J.S. Penttila, P. Heliöstö, H. Seppä, H. Jantunen, “Inkjet printing of transparent and conductive patterns of single-walled carbon nanotubes and PEDOT-PSS composites,” *physica status solidi (b)*, vol. 244, no. 11, pp. 4336–4340, 2007.
- [33] Y. Liu, K. Varahramyan, “All-polymer capacitor fabricated with inkjet printing technique,” *Solid-State Electronics*, vol. 47, no. 9, pp. 1543–1548, 2003.
- [34] Y.C. Cheng, CMOS-Chip Based Printing System for Combinatorial Synthesis. *Dissertation*, TU Darmstadt, Germany, 2012.
- [35] H.P. Le, “Progress and Trends in Inkjet Printing Technology, Part 4,” *Journal of Imaging Science and Technology*, vol. 42, no. 1, 1998.
- [36] J. Bharathan, Y. Yang, “Polymer electroluminescent devices processed by inkjet printing: I. Polymer light-emitting logo,” *Applied Physics Letters*, vol. 72, no. 11, pp. 2660–2662, 1998.
- [37] B. Li, S. Santhanam, L. Schultz, M. Jeffries-EL, M.C. Iovu, G. Sauve, J. Cooper, R. Zhang, J.C. Revelli, A.G. Kusne, J.L. Snyder, T. Kowalewski, L.E. Weiss, R.D. McCullough, G.K. Fedder, D.N. Lambeth, “Inkjet printed chemical sensor array based on polythiophene conductive polymers,” *Sensors and Actuators B*, vol. 123, pp. 651–660, 2007.
- [38] S.F. Jahn, T. Blaudeck, R.R. Baumann, A. Jakob, P. Ecorchard, T. Rüffer, H. Lang, P. Schmidt, “Inkjet Printing of Conductive Silver Patterns by Using the First Aqueous Particle-Free MOD Ink without Additional Stabilizing Ligands,” *Chemistry of Materials*, vol. 22, pp. 3067–3071, 2010.

- [39] S.F. Jahn, A. Jakob, I. Reinhold, L. Engisch, H. Lang, R.R. Baumann, "Structuring of flexible substrates by the use of an aqueous solution based silver ink," *Proceedings of Digital Fabrication*, 2008.
- [40] E. Franz, L. Engisch, S. Jahn, R. Baumann, "Inkjet-druck von silbertinten für leitfähige strukturen," *Proceedings of 4. Thüringer Grenz- und Oberflächentage*, 2008.
- [41] P.H. Chen, H.Y. Peng, H.Y. Liu, S.L. Chang, T.I. Wu, C.H. Cheng, "Pressure response and droplet ejection of a piezoelectric inkjet printhead," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 41, pp. 235–248, 1999.
- [42] Wolfgang Wehl, "Tintendrucktechnologie: Paradigma und Motor der Mikrosystemtechnik: Teil 1," *F&M Feinwerktechnik Mikrotechnik Meßtechnik*, vol. 103, no. 6, pp. 318–324, 1995.
- [43] R. Scheichert, "Kompaktmodell zur Systemsimulation eines Tropfenerzeugers mit Piezobiegewandlern". *VDI Verlag*, 1th ed., 2004.
- [44] H. Seitz, "Modellierung und numerische Simulation des Übersprechverhaltens in einem Tropfenerzeuger mit Piezo-Biegewandleraktoren". *VDI Verlag*, 1th ed., 2002.
- [45] H.P. Le, "Progress and Trends in Inkjet Printing Technology, Part 3," *Journal of Imaging Science and Technology*, vol. 42, no. 1, 1998.
- [46] W. Wehl, "Akustik und Fluidmechanik in Kanälen und Düsen von Tintenschreibern". *Dissertation*, Technische Universität München, Germany, 1984.
- [47] T. Ohara, K. Youcef-Toumi, "Dynamics and control of piezotube actuators for subnanometer precision applications," *Proceedings of the American Control Conference*, 1995.
- [48] F. May, J. Dual, "Focusing of pulses in axially symmetric elastic tubes with fluid filling and piezo actuator by a finite difference simulation and a method of time reversal," *Wave Motion*, vol. 43, no. 4, pp. 311–322, 2006.
- [49] P.A. Hoisington, M.M. McDonald, N.P. Hine, J.A. Hanson, M.L. Biggs, E.R. Moynihan, "Piezoelectric Ink Jet Printing Module." US-Patent 6848773 B1, *Spectra Inc.*, Februar 2005.
- [50] J. Bibl, M. Schoeppler, "Method and apparatus for Scalable Droplet Ejection Manufacturing." US-Patent 7600849 B2, *FujiFilm Dimatics, Inc.*, October 2009.
- [51] K. Silverbrook, "Inkjet Printhead having a self alignet nozzle." US-Patent 6273544 B1, *Silverbrook Research Pty Ltd.*, August 2001.
- [52] D. Jang, D. Kim, J. Moon, "Influence of Fluid Physical Properties on Ink-Jet Printability," *Langmuir*, vol. 25, pp. 2629–2635, 2009.
- [53] K.S. Kwon, "Experimental analysis of waveform effects on satellite and ligament behavior via in situ measurement of the drop-on-demand drop formation curve

- and the instantaneous jetting speed curve,” *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 20, no. 11, 2010.
- [54] C.D. Meinhart, H. Zhang, “The flow structure inside a microfabricated inkjet printhead,” *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 9, no. 1, 2000.
- [55] H.C. Wu, T.R. Shan, H.J. Lin, W.S. Hwang, “Study of micro-droplet behavior for a piezoelectric inkjet printing device using a single pulse voltage pattern,” *Materials Transactions*, vol. 45, no. 5, 2004.
- [56] H.C. Wu, H.J. Lin, W.S. Hwang, “A numerical study of the effect of operating parameters on drop formation in a squeeze mode inkjet device,” *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 13, no. 17, 2005.
- [57] M.H. Tsai, W.S. Hwang, “Effects of pulse voltage on the droplet formation of alcohol and ethylene glycol in a piezoelectric inkjet printing process with bipolar pulse,” *Materials Transactions*, vol. 49, no. 2, 2008.
- [58] U. Currele, D. Cibis, G. Steinborn, K. Krueger, “Der Inkjet-Druck – ein neues Verfahren zum Aufbringen elektrisch leitender Strukturen in der Mikroelektronik,” *Proceedings of IMAPS*, 2006.
- [59] T.S. Leu, J.H. Lin, “Experimental studies of meniscus dynamic behaviors in a squeeze-mode piezoelectric inkjet printhead,” *Materials Science Forum*, vol. 594, pp. 155–162, 2008.
- [60] H.J. Lin, H.C. Wuand, T.R. Shan, W.S. Hwang, “The effects of operating parameters on micro-droplet formation in a piezoelectric inkjet printhead using a double pulse voltage pattern,” *Materials Transactions*, vol. 47, no. 2, pp. 375–382, 2006.
- [61] J.Y. Hwang, M.K. Kim, S.H. Lee, K. Kang, H. Kang, Y.J. Cho, “A study on driving waveform of a piezoelectric inkjet print head,” *Proceedings of SPIE*, vol. 6717, 2007.
- [62] H.C. Wu, H.J. Lin, “Effects of actuating pressure waveforms on the droplet behavior in a piezoelectric inkjet,” *Materials Transactions*, vol. 51, no. 12, pp. 2269–2276, 2010.
- [63] H.Dong, W.W. Carr, “An experimental study of drop-on-demand drop formation,” *Physics of Fluids*, vol. 18, no. 072102, 2006.
- [64] Y. Kim, W. Sim, C.g Park, Y. Yoo, J. Joung, Y. Oh, “The effects of driving waveform of piezoelectric industrial inkjet head for fine patterns,” *Proceedings of 1st IEEE International Conference*, 2006.
- [65] H.Y. Gan, X. Shan, T. Eriksson, B.K. Lok, Y.C. Lam, “Reduction of droplet volume by controlling actuating waveforms in inkjet printing for micro-pattern formation,” *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 19, no. 055010, 2009.
- [66] Y.S. Yoo, C.S. Kim, Y.S. Park, W.C. Sim and C. Park, J. Joung, J.-G. Park, Y. Oh, “Numerical and Experimental Evaluation of Picoliter Inkjet Head for Micro-patterning of Printed Electronics,” *Japanese Journal of Applied Physics*, vol. 49, pp. 1144–1152, 2010.

- [67] H.Dong, W.W. Carr, “Visualization of drop-on-demand inkjet: drop formation and deposition,” *Review of Scientific Instruments*, vol. 77, no. 085101, 2006.
- [68] E. Franz, L. Engisch, S. Jahn, R. Baumann, “Investigations on high precision deposition of liquids by using ink jet technology,” *Proceedings of Printing Future Days*, 2007.
- [69] D. Xu, V. Sanchez-Romaguera, S. Barbosa, W. Travis, J. de Wit, P. Swan, S.G. Yeates, “Inkjet printing of polymer solutions and the role of chain entanglement,” *Journal of Materials Chemistry*, vol. 17, pp. 4902–4907, 2007.
- [70] X.Y. Shu, H. Zhang, H.Y. Liu, D. Xie, J.F. Xiao, “Experimental study on high viscosity fluid micro-droplet jetting system,” *Science China: Technological Sciences*, vol. 53, no. 1, 2010.
- [71] C.Y.Chan, T.M. Liou, K.C. Shih, “Effects of actuating waveform, ink property, and nozzle size on piezoelectrically driven inkjet droplets,” *Microfluidics and Nanofluidics*, vol. 8, no. 5, pp. 575–586, 2010.
- [72] H.C. Wu, H.J. Lin, Y.C. Kuo, W.S. Hwang, “Simulation of droplet ejection for a piezoelectric inkjet printing device,” *Material Transactions*, vol. 45, no. 3, 2004.
- [73] J. Zeng, C.G. Schmidt, H. Liu, A. Jilani, “Multi-disciplinary simulation of piezo-electric driven microfluidic inkjet,” *ASME Conference Proceedings*, 2009.
- [74] T.M. Liou, C.Y. Chan, K.C. Shih, “Effects of actuating waveform, ink property, and nozzle size on piezoelectrically driven inkjet droplets,” *Microfluid Nanofluid*, vol. 8, pp. 575–586, 2010.
- [75] A.S. Yang, C.H. Cheng, “Characterization of droplet ejection process for a full-size piezoelectric inkjet printhead,” *Proceedings of SPIE*, vol. 5650, 2005.
- [76] D.Y. Shin, P. Grassia, B. Derby, “Oscillatory incompressible fluid flow in a tapered tube with a free surface in an inkjet print head,” *Journal of Fluids Engineering*, vol. 127, no. 1, 2005.
- [77] A.S. Yang, W.M. Tsai, “Ejection process simulation for a piezoelectric microdroplet generator,” *Transactions of the ASME*, vol. 128, pp. 1144–11529, 2006.
- [78] Q. Xu, O.A. Basaran, “Computational analysis of drop-on-demand drop formation,” *Physics of Fluids*, vol. 19, no. 102111, 2007.
- [79] T.W. Shield, D.B. Bogy, “A numerical comparison of one-dimensional fluid jet models applied to drop-on-demand printing,” *Journal of Computational Physics*, vol. 67, pp. 327–347, 1986.
- [80] J.H. Park, W.C. Sim, Y.J. Kim, P.J. Kang, C.S. Park, Y.S. Yoo, J.W. Jeong, “Computational simulation of droplet jetting of piezoelectric driven inkjet head with ink compressibility,” *Proceedings of  $\mu$ TAS*, 2007.

- [81] Y.S. Lee, J.W. Chung, “Numerical simulation of hydro–acoustic flow of liquid in piezo inkjet print head,” *ASME Conference Proceedings*, vol. 2, pp. 511–516, 2006.
- [82] O.B. Fawehinmi, P.H. Gaskell, P.K. Jimack, N. Kapur, H.M. Thompson, “A combined experimental and computational fluid dynamics analysis of the dynamics of drop formation,” *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 219, no. 9, 2005.
- [83] K.S. Kwon, “Methods for detecting air bubble in piezo inkjet dispensers,” *Sensors and Actuators A*, vol. 153, pp. 50–56, 2009.
- [84] K.S. Kwon, W. Kim, “A waveform design method for high–speed inkjet printing based on self–sensing measurement,” *Sensors and Actuators A*, vol. 140, pp. 75–83, 2007.
- [85] H. Wijshoff, “Drop formation mechanisms in piezo–acoustic inkjet,” 2007.
- [86] J.F. Dijksman, “Hydro–acoustics of piezoelectrically driven ink–jet print heads,” *Flow, Turbulence and Combustion*, vol. 61, pp. 211–237, 1999.
- [87] K.S. Yang, I.Y. Chen, C.C. Wang, “A numerical examination of the inkjet refilling,” *ASME Conference Proceedings*, vol. 709, 2004.
- [88] J. de Jong, G. de Bruin, H. Reinten, M. van den Berg, H. Wijshoff, M. Versluis, D. Lohse, “Air entrapment in piezo–driven inkjet printheads,” *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 120, no. 3, 2006.
- [89] S.J. Lee, D.H. Kwon, Y.S. Choi, “Dynamics of entrained air bubbles inside a piezodriven inkjet printhead,” *Applied Physics Letters*, vol. 95, no. 221902, 2009.
- [90] R. Jeurissen, A. van der Bos, H. Reinten, M. van den Berg, H. Wijshoff, J. de Jong, M. Versluis, D. Lohse, “Acoustic measurement of bubble size in an inkjet printhead,” *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 126, no. 5, 2009.
- [91] J. de Jong, R. Jeurissen, H. Borel, J. de Jong, R. Jeurissen, H. Borel, M. Versluis, A. Prosperetti, D. Lohse, “Entrapped air bubbles in piezo–driven inkjet printing: Their effect on the droplet velocity,” *Physics of Fluids*, vol. 18, no. 121511, 2006.
- [92] S.N. Ghadiali, D.P. Gaver, “The influence of non–equilibrium surfactant dynamics on the flow of a semi–infinite bubble in a rigid cylindrical capillary tube,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 478, pp. 165–196, 2003.
- [93] B. Beulen, J. de Jong, H. Reinten, M. van den Berg, H. Wijshoff, R. van Dongen, “Flows on the nozzle plate of an inkjet printhead,” *Experiments in Fluids*, vol. 42, pp. 217–224, 2007.
- [94] D.Y. Shin, P. Grassia, B. Derby, “Oscillatory limited compressible fluid flow induced by the radial motion of a thick–walled piezoelectric tube,” *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 114, no. 3, 2003.
- [95] H. Wijshoff, “Structure– and fluid–dynamics in piezo inkjet printheads”. *Dissertation*, Research and Development department of Ocè Technologies B.V, Netherlands, 2008.

- [96] J. Wang, J. Lin, “A two-dimensional theory for surface acoustic wave propagation in finite piezoelectric solids,” *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 16, pp. 623–629, 2005.
- [97] J. Wei, P.M. Sarro, T.C. Due, “A piezoresistive sensor for pressure monitoring at inkjet nozzle,” *Proceedings of IEEE Sensors*, 2010.
- [98] H.B. Hsieh, J. Fitch, D. White, F. Torres, J. Roy, R. Matusiak, B. Krivacic, B. Kowalski, R. Bruce, S. Elrod, “Ultra-high-throughput microarray generation and liquid dispensing using multiple disposable piezoelectric,” *Journal of Biomolecular Screening*, vol. 9, no. 2, 2004.
- [99] I.M. Hutchings, G.D. Martin, S.D. Hoath, “High speed imaging and analysis of jet and drop formation,” *Journal of Imaging Science and Technology*, vol. 51, no. 438, 2007.
- [100] A.S. Yang, C.H. Cheng, C.T. Lin, “Investigation of droplet-ejection characteristics for a piezoelectric inkjet printhead,” *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 220, pp. 435–445, 2006.
- [101] R. Scheicher, J. Heinzl, A. Ott, “Dynamical behaviour of piezoelectrical cantilever beams in an inkjet printhead,” *ASME Conference Proceedings*, vol. 511, 2004.
- [102] G. Percin, B.T. Khuri-Yakub, “Piezoelectric droplet ejector for ink-jet printing of fluids and solid particles,” *Review Of Scientific Instruments*, vol. 74, no. 2, 2003.
- [103] P.V. So, J. Lee, S. Shin, J. Lee, “Electromechanical performance of piezoelectric actuators in inkjet print head,” *Integrated Ferroelectrics*, vol. 98, no. 1, 2008.
- [104] J.R. Castrejón-Pita, G.D. Martin, S.D. Hoath, I.M. Hutchings, “A simple large-scale droplet generator for studies of inkjet printing,” *Review of Scientific Instruments*, vol. 79, no. 7, 2008.
- [105] J. Brunahl, A.M. Grishin, “Chevron-type piezoelectric inkjet actuator,” *Proceedings of the 13th IEEE International Symposium on Applications of Ferroelectrics*, 2002.
- [106] Y. Takeuchi, H. Takeuchi, K. Komatsu, S. Nishi, “Improvement of drive energy efficiency in a shear mode piezo inkjet head,” *Konica Minolta Technology Reports*, vol. 2, 2005.
- [107] O.A. Basaran, “Small-scale free surface flows with breakup: drop formation and emerging applications,” *AIChE Journal*, vol. 48, no. 9, 2002.
- [108] A. Famili, S.A. Palkar, W.J. Baldy, “First drop dissimilarity in drop-on-demand inkjet devices,” *Physics of Fluids*, vol. 23, no. 012109, 2011.
- [109] R. Li, N. Ashgriz, S. Chandra, J.R. Andrews, “Contraction of free liquid ligaments,” *AIChE Journal*, vol. 54, no. 12, 2008.

- [110] S.D. Hoath, G.D. Martin, I.M. Hutchings, "A model for jet shortening in drop-on-demand ink-jet printing," *Proceedings of NIP 25 and Digital Fabrication*, 2009.
- [111] T. Lindemann, "Droplet generation from the nanoliter to the femtoliter range". *Dissertation*, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Germany, 2006.
- [112] E.P. Furlani, C.N. Delametter, J.M. Chwalek, D. Trauemicht, "Surface tension induced instability of viscous liquid jets," *Proceedings of Modeling and Simulation of Microsystems*, 2001.
- [113] Y. Feng, Z. Zhou, J. Zhu, G. Du, "The effect of nozzle layout on droplet ejection of a piezo-electrically actuated micro-atomizer," *Acta Mechanica Sinica*, vol. 23, pp. 163–172, 2007.
- [114] R. Jeurissen, "Bubbles in inkjet printheads: analytical and numerical models". *Dissertation*, University of Twente, Netherlands, 2009.
- [115] T. Taha, Z.F. Cui, "Hydrodynamics of slug flow inside capillaries," *Chemical Engineering Science*, vol. 59, pp. 1181–1190, 2004.
- [116] D. Qian, A. Lawal, "Numerical study on gas and liquid slugs for Taylor flow in a T-junction microchannel," *Chemical Engineering Science*, vol. 61, pp. 7609–7625, 2001.
- [117] S.B. Pidugu, T. Bayraktar, "Flow physics in microchannels," *ASME Conference Proceedings*, vol. 133, 2005.
- [118] C. Pozrikidis, "Expansion of a compressible gas bubble in stokes flow," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 442, pp. 171–189, 2001.
- [119] M.B. Groot Wassink, O.H. Bosgra, D.J. Rixen, S.H. Koekebakker, "Modeling of an inkjet printhead for iterative learning control using bilaterally coupled multiports," *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, 2005.
- [120] R. Werthschützky, G. Pfeifer, "Die Netzwerktheorie als leistungsfähige Entwurfsmethode für elektromechanische Systeme der Mikrotechnik und Mechatronik," *Proceedings of 38. Jahrestagung für Akustik*, 2012.
- [121] R.G. Ballas, G. Pfeifer, R. Werthschützky, "Elektromechanische Systeme der Mikrotechnik und Mechatronik: Dynamischer Entwurf – Grundlagen und Anwendungen". *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*, 2th ed., 2009.
- [122] C. Neupert, S. Kirthivasan, S. Kassner, R. Werthschützky, "Messtechnische Charakterisierung eines netzwerkgeschützten Gewebemodells," *Proceedings of 38. Jahrestagung für Akustik*, 2012.
- [123] S. Kassner, "Transparenz von Teleoperationssystemen – Anwendung der Netzwerktheorie auf mehrdimensionale, parallelkinematische haptische Bedienelemente," *Proceedings of 38. Jahrestagung für Akustik*, 2012.

- [124] S. Sindlinger, "Einfluss der Gehäusung auf die Messunsicherheit von mikrogehäus-ten Drucksensoren mit piezoresistivem Messelement". *Dissertation*, Technische Universität Darmstadt, Germany, 2007.
- [125] R.G. Ballas, "Netzwerkbeschreibung von piezoelektrischen Biegeelementen," *Proceedings of 38. Jahrestagung für Akustik*, 2012.
- [126] R.G. Ballas, H.F. Schlaak, A. Schmidt, "The constituent equations of piezoelectric multilayer bending actuators in closed analytical form and experimental results," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 130–131, pp. 91–98, 2006.
- [127] M. Krause, E. Starke, G. Pfeifer, W.-J. Fischer, T. Zahnert, "Entwurf der Wandle-reinheit eines vollimplantierbaren Mittelohrgerätes mit Finite-Elemente-Methoden und Netzwerkmethoden," *Proceedings of 38. Jahrestagung für Akustik*, 2012.
- [128] U. Marschner, E. Starke, "Bestimmung von Netzwerkparametern piezo-magnetischer Zweischicht-Biegeelemente mit kombinierter Simulation," *Proceedings of 38. Jahrestagung für Akustik*, 2012.
- [129] E. Starke, G. Pfeifer, "Kombination von Netzwerk- und Finite-Elemente-Methoden für die effiziente Modellierung und Optimierung akustischer und elektromechani-scher Systeme," *Proceedings of 38. Jahrestagung für Akustik*, 2012.
- [130] S. Leschka, Entwurfsmethoden und Leistungsgrenzen elektromechanischer Schall-quellen für Ultraschallanwendungen in Gasen im Frequenzbereich um 100 kHz. *Dissertation*, TU Dresden, Germany, 2004.
- [131] A. Lenk, "Elektromechanische Systeme, Band 1: Systeme mit konzentrierten Para-metern". *VEB Verlag Technik Berlin*, 2th ed., 1971.
- [132] A. Lenk, "Elektromechanische Systeme, Band 2: Systeme mit verteilten Parame-tern". *VEB Verlag Technik Berlin*, 2th ed., 1977.
- [133] R.G. Ballas, "Piezoelectric Multilayer Beam Bending Actuators: Static and Dyna-mic Behavior and Aspects of Sensor Integration". *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*, 1th ed., 2007.
- [134] O. Föllinger, "Laplace-, Fourier- und z-Transformation". *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*, 9th ed., 2007.
- [135] G. Bärwolff, "Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure". *Elsie-ver GmbH München*, 1th ed., 2005.
- [136] K.E.h. Küpfmüller, W. Mathis, A. Reibiger, "Theoretische Elektrotechnik. Eine Einführung". *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*, 17th ed., 2007.
- [137] W. Weißgerber, "Elektrotechnik für Ingenieure 1: Gleichstromtechnik und Elektro-magnetisches Feld". *Vieweg+Teubner*, 8th ed., 2009.
- [138] R. Unbehauen, "Systemtheorie: Eine Darstellung für Ingenieure". *Oldenbourg*, 4th ed., 1983.



- [139] W. Weißgerber, "Elektrotechnik für Ingenieure 2: Wechselstromtechnik, Ortskurven, Transformator, Mehrphasensysteme". *Vieweg+Teubner*, 7th ed., 2009.
- [140] J. Yang, "Antiplane Motions of piezokeramik and acoustic wave devices". *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, 1th ed., 2010.
- [141] W. Beitz, K.-H. Müller, "Taschenbuch für den Maschinenbau". *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*, 14th ed., 1981.
- [142] H. Göldner, F. Holzweißig, "Leitfaden der technischen Mechanik". *VEB Fachbuchverlag Leipzig*, 10th ed., 1988.
- [143] J.H. Spurk, N. Aksel, "Strömungslehre". *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*, 7th ed., 2007.
- [144] H. Sigloch, "Technische Fluidodynamik". *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*, 1th ed., 2009.
- [145] P. Stephan, K. Schaber, "Thermodynamik". *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*, 18th ed., 2009.
- [146] W. Scobel, G. Lindström, R.Langkau, "Physik kompakt 1: Mechanik, Fluidodynamik und Wärmelehre". *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*, 2th ed., 2002.
- [147] A. Horn, Modellierung und Simulation orientierungsabhängiger Ätzprozesse in Silizium. *Dissertation*, TU München, Germany, 2005.
- [148] A. Lenk, "Elektromechanische Systeme, Band 3: Systeme mit Hilfsenergie". *VEB Verlag Technik Berlin*, 1th ed., 1975.
- [149] FujiFilm Dimatix Inc., "DMP Product Manual." PN 16637, 2008.
- [150] A. Bibl, J.A. Higginson, K.von Essen, A. Xu, "Single-Use Droplet Ejection Module." US-Patent 7631962 B2, *FujiFilm Dimatics, Inc.*, Dezember 2009.
- [151] A. Bibl, J.A. Higginson, P.A. Hoisington, D.A. Gardner, R.A. Hasenbein, M.L.Biggs, E.R. Moynihan, "Printhead Having a Thin Pre-Fired Piezoelectric Layer." US-Patent 7052117 B2, *FujiFilm Dimatics, Inc.*, Mai 2006.
- [152] J. Birkmeyer, S.R. Deming, Z. Chen, "Sacrificial Substrate for Etching." US-Patent 7622048 B2, *FujiFilm Dimatics, Inc.*, November 2009.
- [153] J. Mehner, "Entwurf in der Mikrosystemtechnik". *Dresden University Press, Dresden, München*, 9th ed., 2000.
- [154] Informationszentrum Technische Keramik, "Thechnische Keramik". *Fahner Verlag, Lauf*, 1th ed., 2003.
- [155] W.E. Forsythe, "Smithsonian Physical Tables". *Knovel*, 9th ed., 2003.
- [156] O. Föllinger, F. Dörrscheidt, M. Klittich, "Regelungstechnik". *Dr. Alfred Hüthig Verlag*, 3th ed., 1985.

- [157] J. Lunze, "Regelungstechnik I". *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*, 5th ed., 2006.
- [158] Faber Kabel, "Koaxialkabel RG 58 C/U nach MIL C 17." Datenblatt, 2011.
- [159] L. Papula, "Mathematische Formelsammlung". *Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden*, 9th ed., 2006.

---

## 11. Eigene Veröffentlichungen

- [1] L. Salun, S. Griesheimer, P. Götz, M. Ibis und J. Rausch, “Mechanical and electrical stability of printed layers against mechanical deformation,” *Proceedings of Large-area, Organic Printed Electronics Convention*, 2010.
- [2] S. Griesheimer, L. Salun, E. Dörsam, P. Götz, M. Ibis, und J. Rausch, “Forming limit curves of flexible sensors on metal surfaces,” *Proceedings of Large-area, Organic Printed Electronics Convention*, 2010.
- [3] L. Salun, S. Griesheimer, P. Götz, M. Mesut und J. Rausch, “Mechanical and electrical stability of printed layers against mechanical deformation,” *Proceedings of Clusterkonferenz Forum Organic Electronic*, 2011.
- [4] J. Rausch, L. Salun, S. Griesheimer, M. Ibis und R. Werthschützky, “Printed piezoresistive strain sensors for monitoring of light-weight structures,” *Proceedings of SENSOR TEST Conference*, 2011.
- [5] J. Rausch, L. Salun, S. Griesheimer, M. Ibis, und R. Werthschützky, “Printed resistive strain sensors for monitoring of lightweight structures,” *Proceedings of Smart Structures/NDE. Smart Sensor Phenomena, Technology, Networks and Systems*, 2011.
- [6] S. Griesheimer, L. Salun, M. Ibis, P. Götz, J. Rausch und E. Dörsam, “Forming limit curves of flexible sensors on metal surfaces,” *Proceedings of Clusterkonferenz Forum Organic Electronic*, 2011.
- [7] M. Ibis, S. Griesheimer, L. Salun, J. Rausch, und P. Groche, “Sheet metal hydro-forming of functional composite structures,” *Proceedings of Smart Structures/NDE. Smart Sensor Phenomena, Technology, Networks and Systems*, 2011.
- [8] L. Salun and E. Dörsam, “Stability and reproducibility of droplet formation in inkjet printing,” *Proceedings of LOPE-C*, 19–21 Juni 2012.
- [9] L. Salun, J. Rausch, A. Lyashenko und E. Dörsam, “Electrical properties of high-resolution structures according to effects of the printing process,” *Proceedings of 5th International Symposium on Flexible Organic Electronics*, 2012.
- [10] J. Rausch, R. Wertschützky, L. Salun, S. Griesheimer, “Piezoresistive dehnungsmess-elemente für adaptronische systeme,” *tm - Technisches Messen*, vol. 79, no. 7–8, pp. 366–3738, 2012.
- [11] L. Salun, E. Dörsam, “Contacting method for printed electronics,” *Proceedings of Large-area, Organic Printed Electronics Convention*, 2012.

- [12] L. Salun, E. Dörsam, “Charakterisierung eines injektsystems auf basis der netzwerktheorie,” *Proceedings of DAGA*, 2012.
- [13] M. Ibis, S. Griesheimer, A. Duschka, M. Brenneis, L. Salun, E. Dörsam und P. Groche, “Integration von elektrischen und elektronischen komponenten in strukturbauteile durch umformen,” *Proceedings of 11. Umformtechnisches Kolloquium*, 2012.
- [14] A. Lyashenko, L. Salun und E. Dörsam, “Hot stamping technology for functional printing,” *Proceedings of 39th International Research Conference of iarigai*, 9–12 September 2012.

---

## A. Übertragungsfunktion in Polynomform

### A.1. Zählerpolynom

Die Vorfaktoren des Zählerpolynoms  $\underline{Z}(j\omega)$  sind durch

$$\begin{aligned} a_0 &= C_{K7}^E C_P^E + C_{K2}^E C_P^E + C_{K7}^E C_{PS}^E + C_{K2}^E C_{PS}^E + C_P^E C_{PS}^E + C_P^E C_S^E + C_{PS}^E C_S^E \\ a_1 &= C_{K7}^E C_{K2}^E C_P^E R_G^E + C_{K7}^E C_{K2}^E C_{PS}^E R_G^E + C_{K7}^E C_P^E C_{PS}^E R_G^E + C_{K7}^E C_P^E C_S^E R_G^E + \\ &\quad C_{K7}^E C_{PS}^E C_S^E R_G^E + C_{K7}^E C_{K2}^E C_P^E R_{K4}^E + C_{K7}^E C_{K2}^E C_{PS}^E R_{K4}^E + \\ &\quad C_{K2}^E C_P^E C_{PS}^E R_{K4}^E + C_{K2}^E C_P^E C_S^E R_{K4}^E + C_{K2}^E C_{PS}^E C_S^E R_{K4}^E \\ a_2 &= C_{K7}^E C_{K2}^E C_P^E L_G^E + C_{K7}^E C_{K2}^E C_{PS}^E L_G^E + C_{K7}^E C_P^E C_{PS}^E L_G^E + C_{K7}^E C_P^E C_S^E L_G^E + \\ &\quad C_{K7}^E C_{PS}^E C_S^E L_G^E + C_{K7}^E C_{K2}^E C_P^E L_{K4}^E + C_{K7}^E C_{K2}^E C_{PS}^E L_{K4}^E + C_{K2}^E C_P^E C_{PS}^E L_{K4}^E + \\ &\quad C_{K2}^E C_P^E C_S^E L_{K4}^E + C_{K2}^E C_{PS}^E C_S^E L_{K4}^E + C_{K7}^E C_{K2}^E C_P^E C_{PS}^E R_G^E R_{K4}^E + \\ &\quad C_{K7}^E C_{K2}^E C_P^E C_S^E R_G^E R_{K4}^E + C_{K7}^E C_{K2}^E C_{PS}^E C_S^E R_G^E R_{K4}^E \\ a_3 &= C_{K7}^E C_{K2}^E C_P^E C_{PS}^E L_{K4}^E R_G^E + C_{K7}^E C_{K2}^E C_P^E C_S^E L_{K4}^E R_G^E + C_{K7}^E C_{K2}^E C_{PS}^E C_S^E L_{K4}^E R_G^E + \\ &\quad C_{K7}^E C_{K2}^E C_P^E C_{PS}^E L_G^E R_{K4}^E + C_{K7}^E C_{K2}^E C_P^E C_S^E L_G^E R_{K4}^E + C_{K7}^E C_{K2}^E C_{PS}^E C_S^E L_G^E R_{K4}^E \\ a_4 &= C_{K7}^E C_{K2}^E C_P^E C_{PS}^E L_G^E L_{K4}^E + C_{K7}^E C_{K2}^E C_P^E C_S^E L_G^E L_{K4}^E + C_{K7}^E C_{K2}^E C_{PS}^E C_S^E L_G^E L_{K4}^E \end{aligned} \tag{A.1}$$

gegeben.

## A.2. Nennerpolynom

Die Vorfaktoren des Nennerspolynoms  $\underline{N}(j\omega)$  sind durch

$$\begin{aligned}
 b_0 &= C_P^E C_{PS}^E \\
 b_1 &= C_{K7}^E C_P^E C_{PS}^E R_G^E + C_{K2}^E C_P^E C_{PS}^E R_{K4}^E \\
 b_2 &= C_{K7}^E C_P^E C_{PS}^E L_G^E + C_{K2}^E C_P^E C_{PS}^E L_{K4}^E + C_{K7}^E C_{K2}^E C_P^E C_{PS}^E R_G^E R_{K4}^E \\
 b_3 &= C_{K7}^E C_{K2}^E C_P^E C_{PS}^E L_{K4}^E R_G^E + C_{K7}^E C_{K2}^E C_P^E C_{PS}^E L_G^E R_{K4}^E \\
 b_4 &= C_{K7}^E C_{K2}^E C_P^E C_{PS}^E L_G^E L_{K4}^E
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

gegeben.

---

## B. Auswertungsscripte

### B.1. Berechnung der Tropfenfläche

Zur Berechnung der Tropfenfläche wurden die Aufnahmen des Tropfens in Wolfram Mathematica 8.0 importiert. Unten ist das zur Berechnung der Tropfenfläche implementierte Script angegeben.

```
(* Lese das Bild ein *)
bild1a1 = Import["C:\\Duse 1\\50_1_musec.bmp"];
bild2a1 = ColorConvert[bild1a1, "GrayScale"];
Export["50_1_musec.bmp", bild2a1];
bild3a1 = Import["50_1_musec.bmp", "Data"];
laengea1 = Dimensions[bild3a1][[1]];
breitea1 = Dimensions[bild3a1][[2]];

(* Vereinfache die Grauwertenliste, reduziere die Tiefe *)
listel1a1 = {};
For[i = 0, i < laengea1, i++,
listel1a1 = Append[listel1a1, Transpose[bild3a1[[i + 1]]][[1]]];
listel1a1;

(* Bestimme den Mittelwert des Hintergrundes *)
mittelGraua1 = Mean[listel1a1][[1]];
For[i = 0, i < 10, i++,
mittelGraua1 = Mean[{mittelGraua1, Mean[listel1a1[[i + 1]]}]]
mittelGraua1;

(* Passe das Bild an den Hintergrund an *)
liste2a1 = listel1a1 - mittelGraua1;
liste3a1 = Table[Table[i*0, {i, breitea1}]*0, {i, laengea1}];
For[i = 0, i < laengea1, i++,
```

```

For[j = 0, j < breiteal, j++,
If[liste2a1[[i + 1]][[j + 1]] < 0,
liste3a1[[i + 1]][[j + 1]] = liste2a1[[i + 1]][[j + 1]],
liste3a1[[i + 1]][[j + 1]] = 0]]
MatrixForm[liste3a1];

(* Zähle die verbleibenden Pixel im Bild*)
ka1 = 0;
For[i = 90, i < laengeal, i++,
For[j = 0, j < breiteal, j++,
If[liste2a1[[i + 1]][[j + 1]] < 0, ka1 = ka1 + 1, ka1 = ka1]]];
Print[ka1 "Pixel schwarz"]

```

Das Skript wird für wenigsten 5 Aufnahmen eines Tropfens wiederholt und liefert die Werte für *ka1*, *kb1*, *kc1*, *kd1*, *kf1*. Aus diesen kann sowohl die mittlere Tropfenfläche als auch Standardabweichung in Pixel für einen Tropfen berechnet werden.

```

(* Gebe berechnete Tropfen-Fläche in Pixel aus *)
Print[ka1 "Pixel schwarz im Bild"]
Print[kb1 "Pixel schwarz im Bild"]
Print[kc1 "Pixel schwarz im Bild"]
Print[kd1 "Pixel schwarz im Bild"]
Print[kf1 "Pixel schwarz im Bild"]

(* Berechne die Standardabweichung der Tropfen-Fläche in Pixel *)
Needs["ErrorBarPlots`"];
abw1 = ErrorBar[StandardDeviation[{ka1*1.0, kb1, kc1, kd1, kf1}]]

(* Berechne den Mittelwert der Tropfen-Fläche in Pixel *)
mean1 = Mean[{ka1*1.0, kb1, kc1, kd1, kf1}]

(* Hänge das Resultat der Gesamtliste für weitere Auswertung an *)
GesamtListe = {};
GesamtListe = Append[GesamtListe, {{1, mean1}, abw1}];

```

Das Script wurde zur Berechnung der Tropfenfläche in Pixel sowohl in einem Düsenkanal als auch in mehreren Düsenkanälen angewendet. Anschließend wurden die Standardabweichung und der Mittelwert der Tropfenfläche in einem Düsenkanal und in verschiedenen Düsenkanälen berechnet.



## B.2. Berechnung des Tropfenabstandes von der Düse

Zur Berechnung des Abstandes des Tropfenmittelpunkts von der Düse wurden die Aufnahmen des Tropfens in Wolfram Mathematica 8.0 importiert. Das zur Auswertung der Aufnahmen implementierte Script ist unten angegeben.

```
(*Lese das Bild ein*)
bild1a1 = Import["C:\\Duse 1\\50_1_musec_gesch.bmp"];
bild2a1 = ColorConvert[bild1a1, "GrayScale"];
Export["50_1_musec_gesch.bmp", bild2a1];
bild3a1 = Import["50_1_musec_gesch.bmp", "Data"];
laengea1 = Dimensions[bild3a1][[1]];
breitea1 = Dimensions[bild3a1][[2]];

(* Vereinfache die Grauwertenliste, reduziere die Tiefe *)
listela1 = {};
For[i = 0, i < breitea1, i++,
listela1 = Append[listela1, Transpose[bild3a1[[i + 1]]][[1]]];
listela1;

(* Schneide oben die Abbildung der Düsenplatte ab *)
number = 20;

(* Bestimme den Mittelwert des Hintergrundes *)
mittelGraua1 = Mean[listela1[[1]]];
For[i = number, i < 10+number, i++,
mittelGraua1 = Mean[{mittelGraua1, Mean[listela1[[i + 1]]}]]];
mittelGraua1;

(* Passe das Bild an den Hintergrund an *)
liste2a1 = listela1 - mittelGraua1;
liste3a1 = Table[Table[i*0, {i, breitea1}]*0, {i, laengea1}];
For[i = 0, i < laengea1, i++,
For[j = 0, j < breitea1, j++,
If[listela1[[i + 1]][[j + 1]] < 0,
liste3a1[[i + 1]][[j + 1]] = liste2a1[[i + 1]][[j + 1]],
liste3a1[[i + 1]][[j + 1]] = 0]];
MatrixForm[listela1];
```

```

(* Bestimme, in welcher Zeile die meisten schwarzen Pixel liegen *)
k = 0;
liste1 = {};
For[i = number , i < laengeal, i++, (*i, j anpassen*)
  {For[j = 0, j < breiteal, j++,
    If[list3a1[[i + 1]][[j + 1]] == 0, k = k,
      k = k + 1]], {liste1 = Join[list1, {k}}, k = 0}};
zeileMax = Position[list1, Max[list1]][[1]][[1]] + number;

(* Bestimme, in welcher Spalte die meisten schwarzen Pixel liegen *)
k = 0;
liste2 = {};
For[i = 0 , i < breiteal, i++,
  {For[j = number, j < laengeal, j++,
    If[list3a1[[j + 1]][[i + 1]] == 0, k = k,
      k = k + 1]], {liste2 = Join[list2, {k}}, k = 0}};
spalteMax = Position[list2, Max[list2]][[1]][[1]];

(* Tropfenmitte in der Matrix*)
Join[{zeileMax, spalteMax}];

(* Zähle, wann wirklich oben die Düsenplatte aufhört *)
k = 0;
liste3 = {};
For[j = 0, j < laengeal, j++,
  If[list3a1[[j + 1]][[spalteMax]] < 1,
    liste3 = Join[list3, {j + 1}]]]
zeileMin = Min[list3];

(* Berechne den Abstand in Pixel *)
abstand1a = zeileMax - zeileMin + 1;
Print[abstand1a "Pixel von der Düse nach 50  $\mu$ s"]

```

Das Skript wird für wenigsten 5 Aufnahmen eines Tropfens wiederholt und liefert die Werte für *abstand1a*, *abstand1b*, *abstand1c*, *abstand1d*, *abstand1f*. Aus diesen kann sowohl der Mittelwert als auch Standardabweichung in Pixel für einen Tropfen berechnet werden.

```
(*Gebe berechneten Tropfen-Abstand in Pixel aus*)
Print[abstandla "Pixel von der Düse"]
Print[abstandlb "Pixel von der Düse"]
Print[abstandlc "Pixel von der Düse"]
Print[abstandld "Pixel von der Düse"]
Print[abstandlf "Pixel von der Düse"]

(*Berechne die Standardabweichung des Tropfenabstandes in Pixel*)
Needs["ErrorBarPlots`"];
abw1 = ErrorBar[
StandardDeviation[
{abstandla*1.0, abstandlb, abstandlc, abstandld, abstandlf}]]

(*Berechne den Mittelwert der Tropfen-Fläche in Pixel*)
mean1 = Mean[{abstandla*1.0, abstandlb, abstandlc, abstandld, abstandlf}]

(*Hänge das Resultat der Gesamtliste für weitere Auswertung an*)
GesamtListe = {};
GesamtListe = Append[GesamtListe, {{1, mean1}, abw1}];
```

Das Script wurde zur Berechnung des Tropfenabstandes in Pixel sowohl in einem Düsenkanal als auch in mehreren Düsenkanälen angewendet. Anschließend wurden die Standardabweichung und der Mittelwert der Werte in einem Düsenkanal und in verschiedenen Düsenkanälen berechnet.

### B.3. Optimierung der Bauelemente

Zur Optimierung der Bauelemente  $C_{K7}^E$  und  $R_G^E$  wurden bekannte Routinen in Wolfram Mathematica 8.0 eingesetzt. Unten ist ein Script zur Optimierung des Bauelementes  $C_{K7}^E$  exemplarisch dargestellt.

```
(* Gebe die Übertragungsfunktion ein *)
A11 = 1 + (1/(s*Cp) + 1/(s*Cps))*(s*Cs +
1/(Rk4 + s*Lk4 + 1/(s*Ck2)) + 1/(Rges + s*Lges + 1/(s*Ck7)));

(* Bestimme den Faktor a_0/b_0 für weitere Normierung *)
num = Collect[Numerator[Together[A11]], s];
```

```

den = Collect[Expand[Denominator[Together[A11]]], s];
s = 0;
a0 = num;
b0 = den;
factor = a0/b0;
Clear[s];

(* Lese die Messdaten ein *)
data = Import[
    "C:\\Ausgewertet_Messung\\gvonsamplmess.txt", "Data"];

(* Gebe die Konstanten ein *)
factor;
Cp = 68*10^(-12);
Cps = 238*10^(-12);
Cs = 484*10^(-9);
Rges = 2.34*10^(-3);
Lges = 277*10^(-6);
Ck2 = 6.42*10^(-9);
Rk4 = 1.39*10^(-3);
Lk4 = 16.45*10^(-6);

(* Definiere die Fit-Funktion *)
s = I*p;
AllfitCk7 = 20*Log[Abs[A11/factor]];

(* Bestimme den Fit-Bereich *)
kolumn1 = Take[Transpose[data][[1]], {16, 100}];
AllmessF =
    Transpose[Join[{kolumn1,
        Take[Transpose[data][[2]], {16, 100}]}]];

(* Fitte die Funktion an die Messwerte *)
FindFit[AllmessF, AllfitCk7, Ck7, p];
Ck7 = Ck7 /. %;

(* Liste die Fit-Funktion in diskrete Werte *)
AllChiSq = Table[{20*Log[Abs[A11]/factor]}, {p, 16, 100}];
AllmessChiSq = Take[Transpose[data][[2]], {16, 100}];

```

```
(* Führe diskreten X-Quadrat-Test durch *)
chiQw = Abs[
  Sum[(AllChiSq[[i]] - AllmessChiSq[[i]])^2/(AllmessChiSq[[i]]),
    {i, Length[AllChiSq]}];
df = Length[AllChiSq];
pWert = 1 - CDF[ChiSquareDistribution[df], chiQw];

(* Gebe Wahrscheinlichkeitswert aus *)
Print["Wahrscheinlichkeitswert p = ", pWert[[1]]]
```

Ein ähnliches Script wurde auch zur Anpassung des Bauelements  $R_G^E$  eingesetzt.

